# Partage des risques dans différents systèmes financiers

Philippe BERNARD
Ingénierie Economique et Financière
master 272 - Université Paris-Dauphine

Janvier 2009

**Exercice 1** *Robinson, Vendredi et leur père Daniel Defoe sont les seuls agents de l'économie ; chacun réside sur une île dont il est propriétaire et qui lui donne à chaque période une récolte de l'unique bien. La récolte de Robinson (r) à la période* $t$ *est notée* $\omega^r(t)$*, celle de Vendredi (v)* $\omega^v(t)$*, celle de Daniel Defoe* $\omega^d(t)$*. Pour simplifier on suppose qu'il n'existe que deux périodes* $t = 0, 1$*. que les deux compères ont les mêmes goûts. Ces derniers sont résumés par la fonction d'utilité* $u_i[.,.]$ *:*

$$u_i\left[c_0^i, c_s^i\right] = \ln(c_0^i) + 0.9.\ln(c_s^i)$$

*Malheureusement, le futur (c'est-à-dire la période* $1$*) est incertain. En effet, les deux îles sont soumis aux aléas climatiques des tropiques lesquels réduisent les récoltes. Cet environnnement aléatoire est résumé par* $3$ *états de la nature* $(s = 1,\ 2,\ 3)$*, dont les probabilités objectives sont respectivement :*

$$\pi_1 = 1/3,\ \pi_2 = 1/3,\ \pi_3 = 1/3$$

*L'état de la nature* $1$ *est celui où l'île de Robinson sera demain ravagée par un cyclone tropical, l'état de la nature* $2$ *celui où c'est l'île de Vendredi qui est frappée, l'état de la nature* $3$ *celui où c'est l'île de Daniel qui est frappée. Aussi, si l'on note* $\omega_s^i$ *la récolte de l'agent* $i$ *à la période* $1$ *lorsque l'état du monde est* $s$*, les récoltes de Robinson sont les suivantes :*

$$\omega_0^r = 200,\ \omega_1^r = 200,\ \omega_2^r = \omega_3^r = 300$$

*celles de Vendredi :*

$$\omega_0^v = 200,\ \omega_1^v = \omega_3^v = 200,\ \omega_2^v = 100$$

*celles de Daniel Defoe :*

$$\omega_0^d = 100,\ \omega_1^d = \omega_2^d = 200,\ \omega_3^d = 100$$

*Robinson (r) et Vendredi (v) ont des préférences à la von Neumann résumée par la fonction d'utilité espérée* $U_i$ *:*

$$U_i = \sum_{s=1}^{S} \pi(s).u_i\left[c_0^i, c_s^i\right]$$

*dont l'utilité élémentaire* $u_i[.,.]$.
*Vendredi et Robinson peuvent communiquer l'un avec l'autre sans coût, signer des contrats, et ont a la même information. Souffrant de la variabilité de leurs récoltes, les deux agents tentent de réallouer au mieux les risques*

*économiques en mettant en place différentes institutions (financières). Les institutions possibles dépendent cependant des techniques de "production", de transport possibles, etc... On supposera que les marchés créés sont parfaitement concurrentiels. Le bien de la période* $0$ *est pris comme numéraire.*
*Daniel Defoe propose à Robinson et à Vendredi d'échanger des promesses de livraison des biens contingents, i.e. des contrats à terme. Pour déterminer les échanges, on met un place un système complet de marchés à terme dont les prix sont notés* $\beta_1^{ad}$, $\beta_2^{ad}$, $\beta_3^{ad}$.
*(1) Déterminez les contraintes budgétaires des agents.*
*(2) Calculez les prix d'équilibre des biens contingents futurs* $\beta_1^{ad}$, $\beta_2^{ad}$, $\beta_3^{ad}$.
*(3) Déterminez les consommations d'équilibre. Commentez-les.*
*(4) L'allocation d'équilibre est-elle efficace ? Les agents sont-ils complètement assurés ? Pourquoi ?*

**Exercice 2** *L'économie est la même que celle de l'exercice 1 précédent. Aux solutions institutionnelles proposées antérieurement, Vendredi préfère une solution capitaliste consistant à créer trois sociétés :* Robinson S.A., Vendredi S.A., Defoe S.A., *qui deviennent propriétaires des deux îles et qui émettent des parts ouvrant droit à la perception des récoltes* futures *de chaque île. Intialement, Robinson est évidemment propriétaire à 100% de* Robinson S.A., *Vendredi propriétaire à 100% de* Vendredi S.A., *Daniel Defoe propriétaire à 100% de* Defoe S.A.. *Mais, les parts peuvent être échangées sur un marché boursier à la période* $0$. *On notera* $\theta_j^i$ *la part de l'entreprise* $j$ $(j = r, v, d)$ *possédée par l'agent* $i$ *à la fermeture de la bourse. On note* $q_j$ *la valeur boursière de l'entreprise* $j$, *i.e. le prix à payer pour posséder la totalité de* $j$ $(\theta_j^i = 1)$.
*(1) Déterminez les contraintes budgétaires de chaque agent.*
*(2) L'allocation d'équilibre est-elle efficace au sens de Pareto ? Commentez.*
*(3) Calculez les valorisations boursières* $q_r$, $q_v$, $q_d$ *des trois entreprises.*
*(4) Déterminez les portefeuilles et les consommations des agents.*
*(5) Expliquez la structure très particulière des portefeuilles des agents.*
*(6) Peut-on subtituer à cette finance directe où les ménages détiennent les actions des entreprises de la finance intermédiée où les entreprises sont possédées par des fonds, les ménages ne détenant que des parts des fonds.*

**Exercice 3** *L'économie est la même que celle de l'exercice 1 précédent, mais Robinson préfère proposer à Vendredi et à Daniel Defoe de mettre en place un système financier comprenant un marché du crédit sur lequel on peut prêter ou emprunter au taux d'intérêt* $r$, *d'un marché de l'assurance sur lequel on peut librement acheter une indemnité* $I$ *en cas de dommages pour une prime unitaire* $q$.
*(1) En supposant sans perte de généralité que les contrats d'assurance sont*

*offerts par une unique compagnie d'assurance (preneuse de prix), déterminez la valeur à l'équilibre de $q$.*
*(2) Déterminez les contraintes budgétaires de chaque agent.*
*(3) L'allocation d'équilibre peut-elle être efficace au sens de Pareto ?*
*(4) Déterminer le taux d'intérêt $r$ d'équilibre.*
*(4) Calculez l'épargne et l'indemnité de chaque agent à l'équilibre.*

# 1 Partage des risques et marchés de biens contigents

Robinson, Vendredi et leur père Daniel Defoe sont les seuls agents de l'économie ; chacun réside sur une île dont il est propriétaire et qui lui donne à chaque période une récolte de l'unique bien. La récolte de Robinson $(r)$ à la période $t$ est notée $\omega^r(t)$, celle de Vendredi $(v)$ $\omega^v(t)$, celle de Daniel Defoe $\omega^d(t)$. Pour simplifier on suppose qu'il n'existe que deux périodes $t = 0, 1.$ que les deux compères ont les mêmes goûts. Ces derniers sont résumés par la fonction d'utilité $u_i[.,.]$ :

$$u_i\left[c_0^i, c_s^i\right] = \ln(c_0^i) + 0.9.\ln(c_s^i)$$

Malheureusement, le futur (c'est-à-dire la période 1) est incertain. En effet, les deux îles sont soumis aux aléas climatiques des tropiques lesquels réduisent les récoltes. Cet environnnement aléatoire est résumé par 3 états de la nature $(s = 1,\ 2,\ 3)$, dont les probabilités objectives sont respectivement :

$$\pi_1 = 1/3,\ \pi_2 = 1/3,\ \pi_3 = 1/3$$

L'état de la nature 1 est celui où l'île de Robinson sera demain ravagée par un cyclone tropical, l'état de la nature 2 celui où c'est l'île de Vendredi qui est frappée, l'état de la nature 3 celui où c'est l'île de Daniel qui est frappée. Aussi, si l'on note $\omega_s^i$ la récolte de l'agent $i$ à la période 1 lorsque l'état du monde est $s$, les récoltes de Robinson sont les suivantes :

$$\omega_0^r = 200,\ \omega_1^r = 200,\ \omega_2^r = \omega_3^r = 300$$

celles de Vendredi :

$$\omega_0^v = 200,\ \omega_1^v = \omega_3^v = 200,\ \omega_2^v = 100$$

celles de Daniel Defoe :

$$\omega_0^d = 100,\ \omega_1^d = \omega_2^d = 200,\ \omega_3^d = 100$$

Robinson $(r)$ et Vendredi $(v)$ ont des préférences à la von Neumann résumée par la fonction d'utilité espérée $U_i$ :

$$U_i = \sum_{s=1}^{S} \pi(s) . u_i \left[c_0^i, c_s^i\right]$$

dont l'utilité élémentaire $u_i[.,.]$.

Vendredi et Robinson peuvent communiquer l'un avec l'autre sans coût, signer des contrats, et ont a la même information. Souffrant de la variabilité de leurs récoltes, les deux agents tentent de réallouer au mieux les risques économiques en mettant en place différentes institutions (financières). Les institutions possibles dépendent cependant des techniques de "production", de transport possibles, etc... On supposera que les marchés créés sont parfaitement concurrentiels. Le bien de la période 0 est pris comme numéraire.

Daniel Defoe propose à Robinson et à Vendredi d'échanger des promesses de livraison des biens contingents, i.e. des contrats à terme. Pour déterminer les échanges, on met un place un système complet de marchés à terme dont les prix sont notés

1. Déterminez les contraintes budgétaires des agents.
2. Calculez les prix d'équilibre des biens contingents futurs $\beta_1^{ad}$, $\beta_2^{ad}$, $\beta_3^{ad}$.
3. Déterminez les consommations d'équilibre. Commentez-les.
4. L'allocation d'équilibre est-elle efficace ? Les agents sont-ils complètement assurés ? Pourquoi ?

(1) Contraintes budgétaires

Supposons que l'on mette en place un système complet de marchés à terme sur les biens contingents. A la première période 0, chaque agent $i$ peut dont acheter (ou vendre) des contrats valant promesse de livraison de biens à la période suivante soit dans l'état du monde 1, soit dans l'état du monde 2, soit dans l'état du monde 3. Si l'on suppose que chaque contrat ne livre qu'une unité, et si l'on note respectivement ses demandes nettes de ces contrats $z_1^i$, $z_2^i$, $z_3^i$, ses consommations seront donc demain :

$$\begin{aligned} c_1^i &= \omega_1^i + z_1^i \\ c_2^i &= \omega_2^i + z_2^i \\ c_3^i &= \omega_3^i + z_3^i \end{aligned}$$

La dépense de l'agent $i$ étant :

$$\beta_1^{ad} z_1^i + \beta_2^{ad} z_2^i + \beta_3^{ad} z_3^i$$

la consommation à la période 0 est simplement la différence entre la richesse initiale de la période 0 et la dépense en contrats :

$$c_0^i = \omega_0^i - \left(\beta_1^{ad} z_1^i + \beta_2^{ad} z_2^i + \beta_3^{ad} z_3^i\right)$$

En substituant aux demandes nettes $z_1^i$, $z_2^i$, $z_3^i$, on obtient la contrainte budgétaire définie sur les consommations contingentes $c_0^i$, $c_1^i$, $c_2^i$, $c_3^i$ :

$$c_0^i = \omega_0^i - \left(\beta_1^{ad}\left(c_1^i - \omega_1^i\right) + \beta_2^{ad}\left(c_2^i - \omega_2^i\right) + \beta_3^{ad}\left(c_3^i - \omega_3^i\right)\right)$$

ou encore après réarrangements :

$$c_0^i + \beta_1^{ad} c_1^i + \beta_2^{ad} c_2^i + \beta_3^{ad} c_3^i = \omega_0^i + \beta_1^{ad}\omega_1^i + \beta_2^{ad}\omega_2^i + \beta_3^{ad}\omega_3^i \qquad (1)$$

(2) Détermination des prix d'équilibre.

Comme la fonction d'utilité commune de Vendredi et Robinson est :

$$u_i\left[c_0^i, c_s^i\right] = \ln(c_0^i) + 0.9\ln(c_s^i)$$

son utilité espérée est :

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{3}\left(\ln(c_0^i) + 0.9\ln(c_1^i)\right) + \frac{1}{3}\left(\ln(c_0^i) + 0.9\ln(c_2^i)\right) \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(\ln(c_0^i) + 0.9\ln(c_3^i)\right) \\ &= \ln\left(c_0^i\right) + 0.3\ln\left(c_1^i\right) + 0.3\ln\left(c_2^i\right) + 0.3\ln\left(c_3^i\right) \end{aligned}$$

et les Tms s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} Tms_{0\to 1}^i\left(c^i\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial c_1}U_i}{\frac{\partial}{\partial c_0}U_i} = 0.3\frac{c_0^i}{c_1^i} \\ Tms_{0\to 2}^i\left(c^i\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial c_2}U_i}{\frac{\partial}{\partial c_0}U_i} = 0.3\frac{c_0^i}{c_2^i} \\ Tms_{0\to 3}^i\left(c^i\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial c_3}U_i}{\frac{\partial}{\partial c_0}U_i} = 0.3\frac{c_0^i}{c_3^i} \end{aligned}$$

Les Tms sont donc identiques, homogènes de degré 0. Les marchés étant complets, l'équilibre est optimal et donc les Tms sont égalisés à l'équilibre :

$$Tms_{0\to j}^r = Tms_{0\to j}^v \; j = 1, 2, 3$$

Il existe donc un agent représentatif $AR$ dont les consommations sont les consommations globales des agents privés :

$$\begin{aligned} c_0^{AR} &= c_0^r + c_0^v \\ c_1^{AR} &= c_1^r + c_1^v \\ c_2^{AR} &= c_2^r + c_2^v \\ c_3^{AR} &= c_3^r + c_3^v \end{aligned}$$

dont la fonction d'utilité espérée est celle des agents :

$$U_{AR} = \ln\left(c_0^{AR}\right) + 0.3\ln\left(c_1^{AR}\right) + 0.3\ln\left(c_2^{AR}\right) + 0.3\ln\left(c_3^{AR}\right)$$

Les choix optimaux de l'agent représentatif vérifient les conditions marginales usuelles :

$$\begin{cases} Tms_{0\to1}^{AR}\left(c^{AR}\right) = \beta_1^{ad} \\ Tms_{0\to2}^{AR}\left(c^{AR}\right) = \beta_2^{ad} \\ Tms_{0\to3}^{AR}\left(c^{AR}\right) = \beta_3^{ad} \end{cases}$$

Dans l'économie d'échange, la consommation de l'agent représentatif est la quantité totale et donc :

$$\begin{cases} \beta_1^{ad} = Tms_{0\to1}^{AR}\left(c^{AR}\right) = 0.3\frac{c_0^{AR}}{c_1^{AR}} = 0.3\frac{\omega_0^r+\omega_0^v+\omega_0^d}{\omega_1^r+\omega_1^v+\omega_1^d} \\ \beta_2^{ad} = Tms_{0\to2}^{AR}\left(c^{AR}\right) = 0.3\frac{c_0^{AR}}{c_2^{AR}} = 0.3\frac{\omega_0^r+\omega_0^v+\omega_0^d}{\omega_2^r+\omega_2^v+\omega_2^d} \\ \beta_3^{ad} = Tms_{0\to3}^{AR}\left(c^{AR}\right) = 0.3\frac{c_0^{AR}}{c_3^{AR}} = 0.3\frac{\omega_0^r+\omega_0^v+\omega_0^d}{\omega_3^r+\omega_3^v+\omega_3^d} \end{cases}$$

Comme les dotations des agents sont :

$$\omega_0^r = 200,\ \omega_1^r = 200,\ \omega_2^r = \omega_3^r = 300$$

$$\omega_0^v = 200,\ \omega_1^v = \omega_3^v = 200,\ \omega_2^v = 100$$

$$\omega_0^d = 100,\ \omega_1^d = \omega_2^d = 200,\ \omega_3^d = 100$$

les prix d'équilibre sont :

$$\begin{cases} \beta_1^{ad} = 0.3\frac{200+200+100}{200+200+200} = .25 \\ \beta_2^{ad} = 0.3\frac{200+200+100}{300+100+200} = .25 \\ \beta_3^{ad} = 0.3\frac{200+200+100}{300+200+100} = .25 \end{cases}$$

(3) Détermination des consommations à l'équilibre.

Le programme de chaque agent est donc :

$$\begin{cases} \max_{c_0^i,c_1^i,c_2^i,c_3^i} \sum_{s=1}^{S} \pi(s).u_i\left[c_0^i, c_s^i\right] \\ \textit{sous les contraintes :} \\ c_0^i + \beta_1^{ad}c_1^i + \beta_2^{ad}c_2^i + \beta_3^{ad}c_3^i = \omega_0^i + \beta_1^{ad}\omega_1^i + \beta_2^{ad}\omega_2^i + \beta_3^{ad}\omega_3^i \\ c_0^i \geq 0,\ c_1^i \geq 0,\ c_2^i \geq 0,\ c_3^i \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Comme la fonction d'utilité élémentaire est le ln, les contraintes de positivité peuvent être ignorées. Les demandes sont donc les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} Tms^i_{0\to1}\left(c^i\right) = \beta^{ad}_1 \\ Tms^i_{0\to2}\left(c^i\right) = \beta^{ad}_2 \\ Tms^i_{0\to3}\left(c^i\right) = \beta^{ad}_3 \\ c^i_0 + \beta^{ad}_1 c^i_1 + \beta^{ad}_2 c^i_2 + \beta^{ad}_3 c^i_3 = \omega^i_0 + \beta^{ad}_1 \omega^i_1 + \beta^{ad}_2 \omega^i_2 + \beta^{ad}_3 \omega^i_3 \end{cases}$$

où les prix sont des paramètres, les inconnues étant les quantités consommées.L'égalisation des Tms aux prix permettent d'exprimer les consommations futures en fonction de la consommation présente :

$$\begin{cases} 0.3\frac{c^i_0}{c^i_1} = \beta^{ad}_1 & \Rightarrow & 0.3c^i_0 = \beta^{ad}_1 c^i_1 \\ 0.3\frac{c^i_0}{c^i_2} = \beta^{ad}_2 & \Rightarrow & 0.3c^i_0 = \beta^{ad}_2 c^i_2 \\ 0.3\frac{c^i_0}{c^i_3} = \beta^{ad}_3 & \Rightarrow & 0.3c^i_0 = \beta^{ad}_3 c^i_3 \end{cases}$$

La substitution de ces relations dans la contrainte budgétaire donne la demande du bien de la période 0 :

$$\begin{aligned} c^i_0 + \beta^{ad}_1 c^i_1 + \beta^{ad}_2 c^i_2 + \beta^{ad}_3 c^i_3 &= c^i_0 + \left(0.3c^i_0\right) + \left(0.3c^i_0\right) + \left(0.3c^i_0\right) \\ &= 1.9c^i_0 \\ &= \frac{19}{10}c^i_0 \end{aligned}$$

et donc :

$$c^i_0 = \frac{10}{19}\left[\omega^i_0 + \beta^{ad}_1 \omega^i_1 + \beta^{ad}_2 \omega^i_2 + \beta^{ad}_3 \omega^i_3\right]$$

Les demandes des autres biens sont déduites de celle du bien 0 :

$$\begin{cases} 0.3c^i_0 = \beta^{ad}_1 c^i_1 & \Rightarrow & c^i_1 = \frac{3}{19}\frac{\omega^i_0+\beta^{ad}_1\omega^i_1+\beta^{ad}_2\omega^i_2+\beta^{ad}_3\omega^i_3}{\beta^{ad}_1} \\ 0.3c^i_0 = \beta^{ad}_2 c^i_2 & \Rightarrow & c^i_2 = \frac{3}{19}\frac{\omega^i_0+\beta^{ad}_1\omega^i_1+\beta^{ad}_2\omega^i_2+\beta^{ad}_3\omega^i_3}{\beta^{ad}_2} \\ 0.3c^i_0 = \beta^{ad}_3 c^i_3 & \Rightarrow & c^i_3 = \frac{3}{19}\frac{\omega^i_0+\beta^{ad}_1\omega^i_1+\beta^{ad}_2\omega^i_2+\beta^{ad}_3\omega^i_3}{\beta^{ad}_3} \end{cases}$$

Comme les prix d'équilibres sont :

$$\beta^{ad}_1 = \beta^{ad}_2 = \beta^{ad}_3 = .25$$

et que les dotations :

$$\omega^r_0 = 200,\ \omega^r_1 = 200,\ \omega^r_2 = \omega^r_3 = 300$$

les consommations de Robinson sont donc à l'équilibre :

$$\begin{cases} c_0^r = \frac{10}{19}(200 + .25 \times 200 + .25 \times 300 + .25 \times 300) = 210.53 \\ c_1^r = \frac{3}{19}\frac{200 + .25 \times 200 + .25 \times 300 + .25 \times 300}{.25} = 252.63 \\ c_2^r = \frac{3}{19}\frac{200 + .25 \times 200 + .25 \times 300 + .25 \times 300}{.25} = 252.63 \\ c_3^r = \frac{3}{19}\frac{200 + .25 \times 200 + .25 \times 300 + .25 \times 300}{.25} = 252.63 \end{cases}$$

De même, pour Vendredi, comme ses dotations sont :

$$\omega_0^v = 200,\ \omega_1^v = \omega_3^v = 200,\ \omega_2^v = 100$$

ses consommations sont donc à l'équilibre :

$$\begin{cases} c_0^v = \frac{10}{19}(200 + .25 \times 200 + .25 \times 100 + .25 \times 200) = 171.05 \\ c_1^v = \frac{3}{19}\frac{200 + .25 \times 200 + .25 \times 100 + .25 \times 200}{.25} = 205.26 \\ c_2^v = \frac{3}{19}\frac{200 + .25 \times 200 + .25 \times 100 + .25 \times 200}{.25} = 205.26 \\ c_3^v = \frac{3}{19}\frac{200 + .25 \times 200 + .25 \times 100 + .25 \times 200}{.25} = 205.26 \end{cases}$$

Enfin, pour Daniel Defoe, les dotations étant :

$$\omega_0^d = 100,\ \omega_1^d = \omega_2^d = 200,\ \omega_3^d = 100$$

ses consommations sont :

$$\begin{cases} c_0^d = \frac{10}{19}(100 + .25 \times 200 + .25 \times 200 + .25 \times 100) = 118.42 \\ c_1^d = \frac{3}{19}\frac{100 + .25 \times 200 + .25 \times 200 + .25 \times 100}{.25} = 142.11 \\ c_2^d = \frac{3}{19}\frac{100 + .25 \times 200 + .25 \times 200 + .25 \times 100}{.25} = 142.11 \\ c_3^d = \frac{3}{19}\frac{100 + .25 \times 200 + .25 \times 200 + .25 \times 100}{.25} = 142.11 \end{cases}$$

On vérifie que ces quantités vérifient les contraintes de ressources :

$$\begin{aligned} c_0^r + c_0^v + c_0^d &= 210.53 + 171.05 + 118.42 \\ &= 500.0 \\ &= \omega_0^r + \omega_0^v + \omega_0^d \end{aligned}$$

et pour tout $s = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} c_s^r + c_s^v + c_s^d &= 252.63 + 205.26 + 142.11 \\ &= 600.0 \\ &= \omega_s^r + \omega_s^v + \omega_s^d \end{aligned}$$

# 2 Partage des risques et assurance

1. Robinson préfère proposer à Vendredi et à Daniel Defoe de remplacer le système des marchés à terme par la mise en place d'un système financier comprenant un marché du crédit sur lequel on peut prêter ou emprunter au taux d'intérêt $r$, d'un marché de l'assurance sur lequel on peut librement acheter une indemnité $I$ en cas de dommages pour une prime $q$.
2. En supposant sans perte de généralité que les contrats d'assurance sont offerts par une unique compagnie d'assurance (preneuse de prix), déterminez la valeur à l'équilibre de $q$.
3. Déterminez les contraintes budgétaires de chaque agent.
4. L'allocation d'équilibre peut-elle être efficace au sens de Pareto ?
5. Déterminer le taux d'intérêt $r$ d'équilibre.
6. Calculez l'épargne et l'indemnité de chaque agent à l'équilibre.

(1) La population comprend trois agents qui avec une probabilité de 1/3 subissent une perte de 100. Si l'on note $I^i$ l'indemnité de l'agent $i$, les profits de la compagnie d'assurance sont dans les différents états :

$$\begin{aligned}\Pi(1) &= (1-q)\, I^r - qI^v - qI^d \\ \Pi(2) &= -qI^r + (1-q)\, I^v - qI^d \\ \Pi(3) &= -qI^r - qI^v + (1-q)\, I^d\end{aligned}$$

Les agents ont le même dommage avec la même probabilité. S'ils choisissent la même indemnité (hypothèse que l'on vérifiera ultérieurement) :

$$I^r = I^v = I^d = I$$

alors :

$$\Pi(1) = \Pi(2) = \Pi(3) = (1-3q)\, I$$

Le profit de la compagnie d'assurance est donc certain car la structure du risque permet sa mutualisation. Comme le profit est une fonction linéaire de $I$ (rendements constants), la concurrence impose la nullité du profit à l'équilibre et donc :

$$\Pi(1) = \Pi(2) = \Pi(3) = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

(2) Contraintes budgétaires des agents et demande d'assurance.

La mise en place d'un marché de l'assurance est équivalent pour chaque agent à l'introduction d'un actif financier qu'il peut acheter à une compagnie d'assurance.

Ainsi, Robinson s'il achète un contrat lui versant une indemnité $I$ en cas de dommage devra payer dans tous les états futurs $q.I$. Par conséquent, l'actif qu'il obtient est donc un actif lui rapportant par unité d'indemnité les revenus suivants :

$$\begin{bmatrix} 1-q \\ -q \\ -q \end{bmatrix}$$

puisque l'état 1 est celui où pour lui le dommage a lieu. De plus Robinson peut épargner au taux d'intérêt au taux d'intérêt $r$. Par conséquent, comme ses dotations sont

$$\omega_0^r = 200,\ \omega_1^r = 200,\ \omega_2^r = \omega_3^r = 300$$

si l'on note $I^r$ et $S^r$ l'indemnité et l'épargne de Robinson, ses consommations seront :

$$\begin{cases} c_0^r = 200 - S^r \\ c_1^r = 200 + (1-q).I^r + S^r(1+r) \\ c_2^r = 300 - q.I^r + S^r(1+r) \\ c_3^r = 300 - q.I^r + S^r(1+r) \end{cases}$$

L'utilité de Robinson s'écrit alors :

$$U_r = \ln(c_0^r) + 0.3\ln(c_1^r) + 0.3\ln(c_2^r) + 0.3\ln(c_3^r)$$

A $S$ donné, la condition de premier ordre donnant la couverture optimale, i.e. $I$, est :

$$\frac{\partial}{\partial I^r}U_r = 0.3(1-q)\frac{\partial}{\partial c_1}u(c_1^r) - 0.3q\frac{\partial}{\partial c_2}u(c_2^r) - 0.3q\frac{\partial}{\partial c_3}u(c_3^r) = 0$$

Comme $c_2^r = c_3^r$ :

$$(1-q)\frac{\partial}{\partial c_1}u(c_1^r) = 2q\frac{\partial}{\partial c_2}u(c_2^r)$$

Mais si $q = \frac{1}{3}$ :

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{\partial}{\partial c_1}u(c_1^r) &= 2\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial c_1}u(c_2^r) \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial c_1}u(c_1^r) = \frac{\partial}{\partial c_1}u(c_2^r) \\ &\Rightarrow c_1^r = c_2^r \end{aligned}$$

Si donc le prix est de $\frac{1}{3}$, la consommation de demain de Robinson est constante :

$$c_1^r = c_2^r = c_3^r$$

et donc :

$$\begin{aligned} 200 + (1-q).I^r + S^r(1+r) &= 300 - q.I^r + S^r(1+r) \\ &\Rightarrow I^r = 100 \end{aligned}$$

L'indemnité demandée par Robinson sera donc de 100 si $q = 1/3$.

Vendredi s'il achète un contrat lui versant une indemnité $I$ en cas de dommage devra payer dans tous les états futurs $q.I$. Par conséquent, l'actif qu'il obtient est donc un actif lui rapportant par unité d'indemnité les revenus suivants :

$$\begin{bmatrix} -q \\ 1-q \\ -q \end{bmatrix}$$

puisque l'état 2 est celui où pour lui le dommage a lieu. De plus Vendredi peut épargner au taux d'intérêt au taux d'intérêt $r$. Par conséquent, comme ses dotations sont

$$\omega_0^v = 200,\ \omega_1^v = \omega_3^v = 200,\ \omega_2^v = 100$$

si l'on note $I^v$ et $S^v$ l'indemnité et l'épargne de Vendredi, ses consommations seront :

$$\begin{cases} c_0^v = 200 - S^v \\ c_1^v = 200 - q.I^v + S^v(1+r) \\ c_2^v = 100 + (1-q).I^v + S^v(1+r) \\ c_3^v = 200 - q.I^v + S^v(1+r) \end{cases}$$

L'utilité de Vendredi s'écrit :

$$U_v = \ln(c_0^v) + 0.3\ln(c_1^v) + 0.3\ln(c_2^v) + 0.3\ln(c_3^v)$$

A $S^v$ donné, la condition de premier ordre donnant la couverture optimale, i.e. $I$, est :

$$\frac{\partial}{\partial I^v}U_v = -0.3q\frac{\partial}{\partial c_1}u(c_1^v) + 0.3(1-q)\frac{\partial}{\partial c_2}u(c_2^v) - 0.3q\frac{\partial}{\partial c_3}u(c_3^v) = 0$$

Comme $c_1^v = c_3^v$ :

$$(1-q)\frac{\partial}{\partial c_2}u(c_2^v) = 2q\frac{\partial}{\partial c_1}u(c_1^v)$$

Si donc le prix est de $\frac{1}{3}$, la consommation de demain de Vendredi est elle-aussi constante :

$$c_1^v = c_2^v = c_3^v$$

et donc :

$$\begin{aligned} 100 + (1-q).I^v + S^v(1+r) &= 300 - q.I^v + S^v(1+r) \\ &\Rightarrow I^v = 100 \end{aligned}$$

L'indemnité demandée par Vendredi sera donc de 100 si $q = 1/3$.

Daniel Defoe s'il achète un contrat lui versant une indemnité $I$ en cas de dommage devra payer dans tous les états futurs $q.I$. Par conséquent, l'actif qu'il obtient est donc un actif lui rapportant par unité d'indemnité les revenus suivants :

$$\begin{bmatrix} -q \\ -q \\ 1-q \end{bmatrix}$$

puisque l'état 3 est celui où pour lui le dommage a lieu. De plus Daniel Defoe peut épargner au taux d'intérêt au taux d'intérêt $r$. Par conséquent, comme ses dotations sont

$$\omega_0^d = 200,\ \omega_1^d = \omega_3^d = 100,\ \omega_3^d = 0$$

si l'on note $I^d$ et $S^d$ l'indemnité et l'épargne de Daniel Defoe, ses consommations seront :

$$\begin{cases} c_0^d = 200 - S^d \\ c_1^d = 200 - q.I^d + S^d(1+r) \\ c_2^d = 200 - q.I^d + S^d(1+r) \\ c_3^d = 100 + (1-q).I^d + S^d(1+r) \end{cases}$$

L'utilité de Defoe s'écrit :

$$U_d = \ln\left(c_0^d\right) + 0.3\ln\left(c_1^d\right) + 0.3\ln\left(c_2^d\right) + 0.3\ln\left(c_3^d\right)$$

A $S^d$ donné, la condition de premier ordre donnant la couverture optimale, i.e. $I^d$, est :

$$\frac{\partial}{\partial I^d}U_d = -0.3q\frac{\partial}{\partial c_1}u\left(c_1^d\right) - 0.3q\frac{\partial}{\partial c_2}u\left(c_2^d\right) + 0.3(1-q)\frac{\partial}{\partial c_3}u\left(c_3^d\right) = 0$$

Comme $c_1^d = c_3^d$ :

$$(1-q)\frac{\partial}{\partial c_3}u\left(c_3^d\right) = 2q\frac{\partial}{\partial c_1}u\left(c_1^d\right)$$

Si donc le prix est de $\frac{1}{3}$, la consommation de demain de Daniel Defoe est elle-aussi constante :

$$c_1^d = c_2^d = c_3^d$$

et donc :

$$\begin{aligned} 100 + (1-q).I^v + S^v(1+r) &= 300 - q.I^v + S^v(1+r) \\ &\Rightarrow I^v = 100 \end{aligned}$$

L'indemnité demandé par Daniel Defoe sera donc de 100 si $q = 1/3$.

On a donc bien vérifié que sur le marché de l'assurance les agents choisissent la même indemnité au prix d'équilibre 1/3. La mutualisation des risques assure que demain les agents réalisent tous les échanges mutuellement possibles. Ceci est formellement attesté par l'égalisation des Tms de la seconde période puisque après calculs on trouve :

$$\begin{aligned} Tms_{1\to 2}^r &= Tms_{1\to 2}^v = Tms_{1\to 2}^d = 1 \\ Tms_{1\to 3}^r &= Tms_{1\to 3}^v = Tms_{1\to 3}^d = 1 \end{aligned}$$

(3) Le marché de l'assurance permet d'égaliser les consommations de demain pour chaque agent lorsque le prix $q$ est 1/3. Les risques étant complètement assurés, il suffit de répartir au mieux les ressources intertemporellement. Les agents disposent pour cela du marché financier sur lequel ils peuvent prêter ou emprunter. La condition marginale d'emprunt sur le marché financier est :

$$Tms_{0\to 1}^i\left(c^i\right) + Tms_{0\to 2}^i\left(c^i\right) + Tms_{0\to 3}^i\left(c^i\right) = \frac{1}{1+r} \tag{3}$$

Par définition :

$$\begin{aligned} Tms_{0\to 2}^i\left(c^i\right) &= Tms_{0\to 1}^i\left(c^i\right) Tms_{1\to 2}^i\left(c^i\right) \\ Tms_{0\to 3}^i\left(c^i\right) &= Tms_{0\to 1}^i\left(c^i\right) Tms_{1\to 3}^i\left(c^i\right) \end{aligned}$$

et donc comme $Tms_{1\to 2}^i\left(c^i\right) = Tms_{1\to 2}^i\left(c^i\right) = 1$, la condition marginale se réécrit :

$$3Tms_{0\to 1}^i\left(c^i\right) = \frac{1}{1+r}$$

A l'équilibre, les Tms seront égalisés :

$$Tms_{0\to 1}^r\left(c^r\right) = Tms_{0\to 1}^v\left(c^v\right) = Tms_{0\to 1}^d\left(c^d\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{1+r}$$

L'équilibre obtenu avec la structure du marché définie par le marché de l'assurance et le marché financier est donc Pareto optimal même si l'on ne dispose que de deux actifs. Mais ceci est la conséquence du fait que le risque est mutualisable et donc que deux instruments sont suffisants : l'un pour réallouer demain entre les états du monde, l'autre pour réallouer les revenus entre aujourd'hui et demain.

(4) Comme l'équilibre est efficace, pour déterminer le taux d'intérêt, il suffit d'utiliser l'agent représentatif :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+r} &= 3Tms_{0\to1}^{AR}\left(c^{AR}\right) = 3\times 0.3\frac{200+200+100}{200+200+200} = .75 \\ &\Rightarrow \quad r = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(5) Pour déterminer les consommations, on peut utiliser deux méthodes. Tout d'abord comme on a montré plus haut que l'équilibre est optimal et donc effectivement complet, on peut utiliser l'équilivalence entre l'équilibre à la Arrow-Debreu et l'équilibre recherché. On connaît donc les consommations des agents, les prix, l'indemnité, la seule inconnue est l'épargne.

Ou on peut calculer directement. En effet, on sait que les consommations de demain sont identiques (et égales à $c_1^i$). Par conséquent, les consommations possibles sont les suivantes :

$$\begin{cases} c_0^r = 200 - S^r \\ c_1^r = \frac{800}{3} + S^r(1+r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0^v = 200 - S^v \\ c_1^v = \frac{500}{3} + S^v(1+r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0^d = 100 - S^d \\ c_1^d = \frac{500}{3} + S^d(1+r) \end{cases}$$

Les conditions marginales déterminant l'épargne est :

$$Tms_{0\to1}^{i}\left(c^{AR}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{1+r}$$

ou encore :

$$0.3\frac{c_0^i}{c_1^i} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+r}$$

Par conséquent pour Robinson :

$$\begin{aligned} 0.3\frac{200-S^r}{\frac{800}{3}+S^r\left(1+\frac{1}{3}\right)} &= \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}} \\ &\Rightarrow \quad S^r = -10.528 \end{aligned}$$

pour Vendredi :

$$
\begin{aligned}
0.3\frac{200-S^v}{\frac{500}{3}+S^v\left(1+\frac{1}{3}\right)} &= \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}} \\
&\Rightarrow S^v = 28.947
\end{aligned}
$$

pour Daniel Defoe :

$$
\begin{aligned}
0.3\frac{100-S^d}{\frac{500}{3}+S^d\left(1+\frac{1}{3}\right)} &= \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}} \\
&\Rightarrow S^d = -18.421
\end{aligned}
$$

# 3 Partage des risques et marchés financiers

Vendredi préfère proposer à Robinson et Daniel Defoe une solution capitaliste consistant à créer trois sociétés : *Robinson S.A.*, *Vendredi S.A.*, *Defoe S.A.*, qui deviennent propriétaires des deux îles et qui émettent des parts ouvrant droit à la perception des récoltes *futures* de chaque île. Intialement, Robinson est évidemment propriétaire à 100% de *Robinson S.A.*, Vendredi propriétaire à 100% de *Vendredi S.A.*, Daniel Defoe propriétaire à 100% de *Defoe S.A.*. Mais, les parts peuvent être échangées sur un marché boursier à la période 0. On notera $\theta_j^i$ la part de l'entreprise $j$ $(j = r, v, d)$ possédée par l'agent $i$ à la fermeture de la bourse. On note $q_j$ la valeur boursière de l'entreprise $j$, i.e. le prix à payer pour posséder la totalité de $j$ $(\theta_j^i = 1)$.

1. Déterminez les contraintes budgétaires de chaque agent.
2. L'allocation d'équilibre est-elle efficace au sens de Pareto ? Commentez.
3. Calculez les valorisations boursières $q_r$, $q_v$, $q_d$ des trois entreprises.
4. Déterminez les portefeuilles et les consommations des agents.
5. Expliquez la structure très particulière des portefeuilles des agents.

(1) Les trois entreprises livrent à la seconde période les dotations futures de leurs fondateurs. Ainsi, le vecteur des dividendes de *Robinson S.A.*, noté $V_r$, est :

$$V_r = [200, 300, 300]^\top$$

alors que ceux de *Vendredi S.A.* et de *Defoe S.A.*, notés respectivement $V_v$ et $V_d$, est :

$$V_v = [200, 100, 200]^\top$$

$$V_d = [200, 200, 100]^\top$$

A la première période, chaque agent $i$ dispose de sa récolte présente $(\omega_0^i)$, de la propriété de son entreprise dont la valeur est $q_i$, et sélectionne son portefeuille d'actions $\left(\theta_r^i, \theta_v^i, \theta_d^i\right)$ ainsi que sa consommation présente :

$$c_0^i + q_r.\theta_r^i + q_v.\theta_v^i + q_d.\theta_d^i = q_i + \omega_0^i \tag{4}$$

A la seconde période, dans chaque état du monde, les consommations futures seront déterminées par les dividences reçus :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1^i = V_r(1).\theta_r^i + V_v(1).\theta_v^i + V_d(1).\theta_d^i \\ c_2^i = V_r(2).\theta_r^i + V_v(2).\theta_v^i + V_d(2).\theta_d^i \\ c_3^i = V_r(3).\theta_r^i + V_v(3).\theta_v^i + V_d(3).\theta_d^i \end{array} \right. \tag{5}$$

(2) Les trois actifs sont linéairement indépendant. Le rang de la matrice des dividendes :

$$V = \begin{bmatrix} 200 & 200 & 200 \\ 300 & 100 & 200 \\ 300 & 200 & 100 \end{bmatrix}$$

est 3 ; les marchés financiers sont donc complets. La complétude assure qu'à l'équilibre (intérieur) les Tms seront donc égalisés et que l'équilibre est optimal.

(3) Les consommations futures étant données par (5), les Tms étant :

$$\begin{aligned} Tms_{0\to1}^i\left(c^i\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial c_1}U_i}{\frac{\partial}{\partial c_0}U_i} = 0.3\frac{c_0^i}{c_1^i} = 0.3\frac{c_0^i}{V_r(1).\theta_r^i + V_v(1).\theta_v^i + V_d(1).\theta_d^i} \\ Tms_{0\to2}^i\left(c^i\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial c_2}U_i}{\frac{\partial}{\partial c_0}U_i} = 0.3\frac{c_0^i}{c_2^i} = 0.3\frac{c_0^i}{V_r(2).\theta_r^i + V_v(2).\theta_v^i + V_d(2).\theta_d^i} \\ Tms_{0\to3}^i\left(c^i\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial c_3}U_i}{\frac{\partial}{\partial c_0}U_i} = 0.3\frac{c_0^i}{c_3^i} = 0.3\frac{c_0^i}{V_r(3).\theta_r^i + V_v(3).\theta_v^i + V_d(3).\theta_d^i} \end{aligned}$$

les demandes des actifs et la consommation présente sont déterminées par

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0^i + q_r.\theta_r^i + q_v.\theta_v^i + q_d.\theta_d^i = q_i + \omega_0^i \\ q_r = Tms_{0\to1}^i.V_r(1) + Tms_{0\to2}^i.V_r(2) + Tms_{0\to3}^i.V_r(3) \\ q_v = Tms_{0\to1}^i.V_v(1) + Tms_{0\to2}^i.V_v(2) + Tms_{0\to3}^i.V_v(3) \\ q_r = Tms_{0\to1}^i.V_d(1) + Tms_{0\to2}^i.V_d(2) + Tms_{0\to3}^i.V_d(3) \end{array} \right.$$

Les marchés sont complets, les (fonctions) Tms des agents sont identiques et homogènes de degré 0 : il existe donc un agent représentatif dont les consommations sont les dotations. Aussi, les Tms de l'agent représentatif sont :

$$\begin{cases} Tms^{AR}_{0\to 1} = 0.3\frac{200+200+100}{200+200+200} = .25 \\ Tms^{AR}_{0\to 2} = 0.3\frac{200+200+100}{300+100+200} = .25 \\ Tms^{AR}_{0\to 3} = 0.3\frac{200+200+100}{300+200+100} = .25 \end{cases}$$

Les prix d'équilibre sont évalués à l'aide des Tms de l'agent représentatif :

$$V = \begin{bmatrix} 200 & 200 & 200 \\ 300 & 100 & 200 \\ 300 & 200 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} q_r = \frac{1}{4}.200 + \frac{1}{4}.300 + \frac{1}{4}.300 = 200 \\ q_v = \frac{1}{4}.200 + \frac{1}{4}.100 + \frac{1}{4}.200 = 125 \\ q_r = \frac{1}{4}.200 + \frac{1}{4}.200 + \frac{1}{4}.100 = 125 \end{cases}$$

(4) La complétude assure que la substitution d'une structure financière aux marchés de biens contingents, sans redistribution des biens, ne modifie pas l'équilibre réel. Par conséquent, les consommations sont celles de l'équilibre à la Arrow-Debreu. Ainsi, pour Robinson, ses consommations seront :

$$c^r_0 = 210.53,\ c^r_1 = c^r_2 = c^r_3 = 252.63$$

A ces consommations, la valeur des Tms de Robinson est évidemment identique à celles de l'agent représentatif :

$$Tms^r_{0\to 1} = Tms^r_{0\to 2} = Tms^r_{0\to 3} = 0.3\frac{210.53}{252.63} = 0.25$$

Le portefeuille permettant d'atteindre les consommations futures est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} c^r_1 = 200.\theta^r_r + 200.\theta^r_v + 200.\theta^r_d \\ c^r_2 = 300.\theta^r_r + 100.\theta^r_v + 200.\theta^r_d \\ c^r_3 = 300.\theta^r_r + 200.\theta^r_v + 100.\theta^r_d \end{cases}$$

et donc, après calculs, on trouve :

$$\theta^r_r = \theta^r_v = \theta^r_d = .42105$$

On vérifie que ces choix vérifie bien la contrainte budgétaire de première période :

$$c^r_0 + q_r.\theta^r_r + q_v.\theta^r_v + q_d.\theta^r_d = q_r + \omega^r_0$$

En effet :

$$\begin{aligned} c_0^r + q_r.\theta_r^r + q_v.\theta_v^r + q_d.\theta_d^r &= 210.53 + (200 + 125 + 125) \times .42105 \\ &= 400.0 \\ &= q_r + \omega_0^r \end{aligned}$$

De même, ces choix sont optimaux dans cette contrainte budgétaire puisque l'on a bien pour chaque actif :

$$q_i = Tms_{0\to 1}^r.V_i(1) + Tms_{0\to 12}^r.V_i(2) + Tms_{0\to 3}^r.V_i(3)$$

De même, pour Vendredi, ses consommations étant :

$$c_0^v = 171.05,\ c_1^v = c_2^v = c_3^v = 205.26$$

A ces consommations, la valeur des Tms de Vendredi est évidemment identique à celles de l'agent représentatif :

$$Tms_{0\to 1}^r = Tms_{0\to 2}^r = Tms_{0\to 3}^r = 0.3\frac{171.05}{205.26} = 0.25$$

Le portefeuille permettant d'atteindre les consommations futures est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} c_1^v = 200.\theta_r^v + 200.\theta_v^v + 200.\theta_d^v \\ c_2^v = 300.\theta_r^v + 100.\theta_v^v + 200.\theta_d^v \\ c_3^v = 300.\theta_r^v + 200.\theta_v^v + 100.\theta_d^v \end{cases}$$

et donc, après calculs, on trouve :

$$\theta_r^v = \theta_v^v = \theta_d^v = .3421$$

On vérifie que ces choix vérifie bien la contrainte budgétaire de première période :

$$c_0^v + q_r.\theta_r^v + q_v.\theta_v^v + q_d.\theta_d^v = q_v + \omega_0^v$$

En effet :

$$\begin{aligned} c_0^v + q_r.\theta_r^v + q_v.\theta_v^v + q_d.\theta_d^v &= 171.05 + (200 + 125 + 125) \times .3421 \\ &= 325.0 \\ &= q_v + \omega_0^v \end{aligned}$$

De même, ces choix sont optimaux dans cette contrainte budgétaire puisque l'on a bien pour chaque actif $i$ :

$$q_i = Tms_{0\to 1}^v.V_i(1) + Tms_{0\to 12}^v.V_i(2) + Tms_{0\to 3}^v.V_i(3)$$

Enfin, pour Daniel Defoe, ses consommations sont :

$$c_0^d = 118.42,\ c_1^d = c_2^d = c_3^d = 142.11$$

A ces consommations, la valeur des Tms de Robinson est évidemment identique à celles de l'agent représentatif :

$$Tms_{0\to1}^d = Tms_{0\to2}^d = Tms_{0\to3}^d = 0.3\frac{118.42}{142.11} = 0.25$$

Le portefeuille permettant d'atteindre les consommations futures est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} c_1^d = 200.\theta_r^d + 200.\theta_v^d + 200.\theta_d^d \\ c_2^d = 300.\theta_r^d + 100.\theta_v^d + 200.\theta_d^d \\ c_3^d = 300.\theta_r^d + 200.\theta_v^d + 100.\theta_d^d \end{cases}$$

et donc, après calculs, on trouve :

$$\theta_r^d = \theta_v^d = \theta_d^d = .2\,3685$$

On vérifie que ces choix vérifie bien la contrainte budgétaire de première période :

$$c_0^d + q_r.\theta_r^d + q_v.\theta_v^d + q_d.\theta_d^d = q_d + \omega_0^d$$

En effet :

$$\begin{aligned} c_0^d + q_r.\theta_r^d + q_v.\theta_v^d + q_d.\theta_d^d &= 118.42 + (200 + 125 + 125) \times .23685 \\ &= 225.0 \\ &= q_v + \omega_0^v \end{aligned}$$

De même, ces choix sont optimaux dans cette contrainte budgétaire puisque l'on a bien pour chaque actif $i$ :

$$q_i = Tms_{0\to1}^d.V_i(1) + Tms_{0\to12}^d.V_i(2) + Tms_{0\to3}^d.V_i(3)$$

(5) On constate que les agents détiennent une part constante de chaque entreprise :

$$\theta_r^r = \theta_v^r = \theta_d^r = .\,42105$$
$$\theta_r^v = \theta_v^v = \theta_d^v = .\,3421$$
$$\theta_r^d = \theta_v^d = \theta_d^d = .2\,3685$$

Cette constance n'est nullement un hasard numérique propre à l'exercice. L'équilibre du système financier étant optimal, la réallocation des risques implique que chaque agent consomme une part constante des quantités disponibles ; autrement dit dans chaque état futur $s$, la consommation de chaque agent $i$ s'écrit :

$$c_s^i = k_i.\Omega_s, \ 0 < k_i < 1$$

où $\Omega_s$ est la dotation (= consommation) globale, $k_r + k_v + k_d = 1$. La part $k_i$ de chaque agent dépend de sa richesse, plus celle-ci est importante plus $k_i$ sera grand. La constance de $k_i$ à travers les états implique que le portefeuille est lui-même de la forme :

$$\theta_r^i = \theta_v^i = \theta_d^i = k_i$$

En effet, ce portefeuille donne les bonnes quantités :

$$\begin{aligned} c_s^i &= \theta_r^i V_r(s) + \theta_v^i V_v(s) + \theta_d^i.V_d(s) \\ &= k_i V_r(s) + k_i V_v(s) + k_i.V_d(s) \\ &= k_i \omega_s^r + k_i \omega_s^v + k_i \omega_s^d \\ &= k_i \times \left(\omega_s^r + \omega_s^v + \omega_s^d\right) \\ &= k_i \Omega_s \end{aligned}$$

(6) Des intermédiaires, des fonds de placement, sont mis en place. Sans perte de généralité, on suppose qu'il existe un seul intermédiaire (représentatif). On suppose que les ménages ne peuvent acheter que les parts de ceux-ci (notée $\theta_{fp}^i$), le bilan de l'intermédiaire est alors :

| emplois | | ressources | |
|---|---|---|---|
| ent. | qté | parts | qté |
| Robinson S.A | $\theta_r^{fp}$ | Robinson | $\theta_{fp}^r$ |
| Vendredi S.A | $\theta_v^{fp}$ | Vendredi | $\theta_{fp}^v$ |
| Dufoe S.A | $\theta_d^{fp}$ | Defoe | $\theta_{fp}^d$ |

Chaque ménage $i$, en achetant des parts dans l'intermédiaire, achète une fraction équivalente des revenus des entreprises possédées par l'intermédiaire. Ainsi, si $V_{fp}(s)$ est le revenu de l'intermédiaire dans l'état $s$, la consommation future de l'agent $i$ sera dans ce même état $s$ :

$$\begin{aligned} c_s^i &= \theta_{fp}^i V_{fp}(s) \\ &= \theta_{fp}^i \left[\theta_r^{fp} V_r(s) + \theta_v^{fp} V_v(s) + \theta_d^{fp} V_d(s)\right] \\ &= \theta_{fp}^i \left[V_r(s) + V_v(s) + V_d(s)\right] \end{aligned}$$

puisque $\theta_r^{fp} = \theta_v^{fp} = \theta_d^{fp} = 1$. Passer exclusivement par un intermédiaire se traduit donc pour le ménage par une restriction sur les revenus qu'il peut obtenir. En modulant sa part dans l'intermédiaire, le ménage ne peut que faire varier ses revenus que dans la direction définie par $V_{fp}$. Il ne peut donc en passant par l'intermédiaire qu'obtenir un portefeuille qui de fait combine les actifs des entreprises dans les mêmes proportions : celles choisies par le fonds de pension. A contrario, s'il détient lui-même les actions des entreprises, il peut combiner les trois actifs dans des proportions variables. Ce manque de flexibilité de la finance intermédiée est cependant sans conséquence ici car c'est une des caractéristiques de l'équilibre que de combiner les actifs dans la même proportion. Si l'on met donc place un unique intermédiaire, les ménages vont donc acheter les parts suivantes de celui-ci :

$$\theta_{fp}^r = .42105,\ \theta_{fp}^v = .3421,\ \theta_{fp}^d = .23685$$

La valeur de l'intermédiaire ($q_{fp}$) est déterminée par celles des entreprises qu'il possède :

$$q_{fp} = q_r + q_v + q_d = 450$$