Microéconomie - licence
Exercices sur l'équilibre général dans l'incertain

Philippe BERNARD
Ingénierie Economique et Financière
Paris-Dauphine

Octobre 2007

Exercice 1 *On considère une économie d'échange à deux périodes avec un unique bien fongible par période. Il existe deux états du monde $s = 1, 2$ dont les probabilités sont respectivement π_1 et π_2. Il existe deux agents 1 et 2 dont les préférences sont identiques, vérifient l'axiomatique de vNM, dont l'utilité élémentaire est :*

$$u^i = \ln\left(c_0^i\right) + \beta \ln\left(c_s^i\right)$$

L'agent 1 dispose de Ω_0 biens de la première période, d'aucun à la deuxième période. L'agent 2 ne dispose de rien à la première période, et à la deuxième période, de Ω_1 biens dans l'état du monde 1, de Ω_2 dans l'état du monde 2. Les valeurs numériques des paramètres sont :

$$\beta = 0.75,\ \pi_1 = 0.75,\ \Omega_0 = 80,\ \Omega_1 = 100,\quad \Omega_2 = 150$$

(1) Déterminer le taux d'intérêt et l'épargne si les agents ne disposent que d'une caisse d'épargne auprès de laquelle ils peuvent prêter/emprunter, le rendement d'un placement à la caisse est R.
(2) Démontrer l'inefficacité de l'équilibre avec la seule caisse d'épargne.

Exercice 2 *L'économie comporte :*
- un bien non stockable pris comme numéraire ;
- deux dates ($t = 0, 1$) ;
- à la date 1, deux états de la nature ($s = k, l$) ;
- deux entreprises ($j = a, b$) ;
- 3 individus identiques, repérés par l'indice i ($i = 1, 2, 3$).
L'individu i maximise l'utilité :

$$U_i = \left(c^i(0)\right)^{\gamma_0} \left(c^i(k)\right)^{\gamma_k} \left(c^i(l)\right)^{\gamma_l}$$

où $c^i(d)$ est la quantité consommée dans l'état du monde d ($d = 0, k, l$), où les exposants γ_0, γ_k, γ_l sont strictement positifs.
Initialement, l'individu i est doté :
- d'une quantité $\omega^i(0)$ du bien ;
des proportions $\theta_j^i(0)$ des actions des entreprises.
A la date 1, l'état s s'étant réalisé, l'entreprise j partage entre ses actionnaires le profit total $D_j(s)$ au prorata des proportions $\theta_j^i(1)$ d'actions (parfaitement divisibles) qu'ils détiennent alors. Les profits distribués constituent les seuls revenus des individus à la date 1.
Les données sont :

$$\gamma_0 = 1,\ \gamma_k = \frac{1}{2},\ \gamma_l = \frac{1}{4}$$

les dotations initiales :

i	$\omega^i(0)$	$\theta_a^i(0)$	$\theta_b^i(0)$
1	50	0.2	0.4
2	30	0.3	0.2
3	60	0.5	0.4

les profits distribués :

$_j\backslash^s$	k	l
a	20	45
b	60	15

Calculez les valeurs d'équilibre V_a et $V_b(0)$ des capitalisations boursières des entreprises.

Exercice 3 *On considère une économie d'échanges comportant deux périodes $t = 0, 1$, un unique bien de consommation (périssable) dont Robinson (r) et Vendredi (v) sont les agents. Il existe trois états $s = 1, 2, 3$ dont les probabilités sont $\pi_1 = 2/5$, $\pi_2 = 1/5$, $\pi_3 = 2/5$. Les états déterminent les dotations de Vendredi, celles de Robinson demeurant constantes :*

dotations	*0*	*1*	*2*	*3*
Robinson	*100*	*50*	*50*	*50*
Vendredi	*50*	*0*	*100*	*200*

Les préférences des deux agents vérifient l'utilité espérée :

$$U_i = \mathbf{E}u_i,\ u_i = \ln\left(c_0^i\right) + \ln\left(c_1^i\right) \tag{1}$$

(1) Pour réallouer leurs ressources, Vendredi et Robinson décide de vendre actifs financiers 1 *et* 2 *dont les revenus sont :*

$$d_1 = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix},\ d_2 = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

On note q_1 et q_2 les prix de ces parts, d_1 et d_2 les revenus de chaque part : On suppose qu'il existe également un marché des fonds prêtables (= marché monétaire) sur lequel on peut prêter ou emprunter au taux d'intérêt r. Montrer que les prix :

$$q_1 = 84.349,\ q_2 = 204.35,\ r = -.40722$$

et les portefeuilles :

$$\begin{aligned} z_1^r &= 2.0998,\ z_2^r = -.82843,\ B^r = 0 \\ z_1^v &= -2.0998,\ z_2^v = .82843,\ B^v = 0 \end{aligned}$$

définissent un équilibre - z_1^i, z_2^i : les quantités détenues des deux actifs 1 *et* 2*, B^i : le montant de numéraire prêté. Montrer que cet équilibre n'est pas optimal au sens de Pareto.*
(2) Plutôt que d'introduire les actifs mentionnés plus haut ainsi que le marché des fonds prêtables, les agents préfèrent introduire des parts sur les dotations futures. On note q_r et q_v les prix des parts sur les dotations futures de Robinson et Vendredi, d_r et d_v les revenus de chaque part :

$$d_r = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}, \ d_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Démontrer que l'équilibre (supposé unique) de cette économie est Pareto-optimal.
(3) Comparer les équlibres des deux questions. Expliquer pourquoi le second équilibre est optimal alors qu'il utilise moins d'actifs financiers.

Exercice 4 *L'économie comporte :*
- 2 dates $(t = 0, 1)$ *;*
- 2 états du monde ;
- une structure financière constituée par les marchés de deux actifs $(j = 1, 2)$*, dont les valeurs et les dividendes à l'équilibre sont :*

$$v\,(0) = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$d\,(1) = \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 22 & 26 \end{bmatrix}$$

(1) Quel est le taux d'actualisation de l'économie ?
(2) Quelle est la valeur d'un troisième actif dont les dividendes sont

$$d_3\,(1) = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 *On raisonne dans le cadre temporel* $[0, 1]$*.L'économie comporte : trois états de la nature respectivement notés e, m, s ;*
la structure financière constituée par les marchés de deux actifs ($j = 1, 2$), dont les dividendes $d_j(s)$ et les prix d'équilibre v_j sont donnés par :

$$d = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 4 & 14 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}, \ v = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(1) Existe-t-il un taux d'actualisation ?
(2) A quelles conditions un troisième actif financier, dont le vecteur des dividendes s'écrit :

$$d_3 = \begin{bmatrix} d_3(e) \\ d_3(m) \\ d_3(s) \end{bmatrix}$$

peut-il être évalué par arbitrage ?

Exercice 6 *Robinson, Vendredi et leur père Daniel Defoe sont les seuls agents de l'économie ; chacun réside sur une île dont il est propriétaire et qui lui donne à chaque période une récolte de l'unique bien. La récolte de Robinson (r) à la période* t *est notée* $\omega^r(t)$*, celle de Vendredi (v)* $\omega^v(t)$*, celle de Daniel Defoe* $\omega^d(t)$*. Pour simplifier on suppose qu'il n'existe que deux périodes* $t = 0, 1$*. que les deux compères ont les mêmes goûts. Ces derniers sont résumés par la fonction d'utilité* $u_i[.,.]$ *:*

$$u_i\left[c_0^i, c_s^i\right] = \ln(c_0^i) + 0.9. \ln(c_s^i)$$

Malheureusement, le futur (c'est-à-dire la période 1*) est incertain. En effet, les deux îles sont soumis aux aléas climatiques des tropiques lesquels réduisent les récoltes. Cet environnnement aléatoire est résumé par* 3 *états de la nature (*$s = 1,\ 2,\ 3$*), dont les probabilités objectives sont respectivement :*

$$\pi_1 = 1/3,\ \pi_2 = 1/3,\ \pi_3 = 1/3$$

L'état de la nature 1 *est celui où l'île de Robinson sera demain ravagée par un cyclone tropical, l'état de la nature* 2 *celui où c'est l'île de Vendredi qui est frappée, l'état de la nature* 3 *celui où c'est l'île de Daniel qui est frappée. Aussi, si l'on note* ω_s^i *la récolte de l'agent* i *à la période* 1 *lorsque l'état du monde est* s*, les récoltes de Robinson sont les suivantes :*

$$\omega_0^r = 200,\ \omega_1^r = 200,\ \omega_2^r = \omega_3^r = 300$$

celles de Vendredi :

$$\omega_0^v = 200,\ \omega_1^v = \omega_3^v = 200,\ \omega_2^v = 100$$

celles de Daniel Defoe :

$$\omega_0^d = 100,\ \omega_1^d = \omega_2^d = 200,\ \omega_3^d = 100$$

Robinson (r) et Vendredi (v) ont des préférences à la von Neumann résumée par la fonction d'utilité espérée U_i *:*

$$U_i = \sum_{s=1}^{S} \pi(s).u_i\left[c_0^i, c_s^i\right]$$

dont l'utilité élémentaire $u_i\,[.,.]$.
Vendredi et Robinson peuvent communiquer l'un avec l'autre sans coût, signer des contrats, et ont a la même information. Souffrant de la variabilité de leurs récoltes, les deux agents tentent de réallouer au mieux les risques économiques en mettant en place différentes institutions (financières). Les institutions possibles dépendent cependant des techniques de "production", de transport possibles, etc... On supposera que les marchés créés sont parfaitement concurrentiels. Le bien de la période 0 *est pris comme numéraire.*
Daniel Defoe propose à Robinson et à Vendredi d'échanger des promesses de livraison des biens contingents, i.e. des contrats à terme. Pour déterminer les échanges, on met un place un système complet de marchés à terme dont les prix sont notés β_1^{ad}, β_2^{ad}, β_3^{ad}.
(1) Déterminez les contraintes budgétaires des agents.
(2) Calculez les prix d'équilibre des biens contingents futurs β_1^{ad}, β_2^{ad}, β_3^{ad}.
(3) Déterminez les consommations d'équilibre. Commentez-les.
(4) L'allocation d'équilibre est-elle efficace ? Les agents sont-ils complètement assurés ? Pourquoi ?

Exercice 7 *L'économie est la même que celle de l'exercice 6 précédent. Aux solutions institutionnelles proposées antérieurement, Vendredi préfère une solution capitaliste consistant à créer trois sociétés :* Robinson S.A., Vendredi S.A., Defoe S.A., *qui deviennent propriétaires des deux îles et qui émettent des parts ouvrant droit à la perception des récoltes* futures *de chaque île. Intialement, Robinson est évidemment propriétaire à 100%* de Robinson S.A., *Vendredi propriétaire à 100%* de Vendredi S.A., *Daniel Defoe propriétaire à 100%* de Defoe S.A.. *Mais, les parts peuvent être échangées sur un marché boursier à la période* 0. *On notera* θ_j^i *la part de l'entreprise* j *(*$j = r, v, d$*) possédée par l'agent* i *à la fermeture de la bourse. On note* q_j *la valeur boursière de l'entreprise* j*, i.e. le prix à payer pour posséder la totalité de* j *(*$\theta_j^i = 1$*).*
(1) Déterminez les contraintes budgétaires de chaque agent.
(2) L'allocation d'équilibre est-elle efficace au sens de Pareto ? Commentez.
(3) Calculez les valorisations boursières q_r, q_v, q_d *des trois entreprises.*
(4) Déterminez les portefeuilles et les consommations des agents.
(5) Expliquez la structure très particulière des portefeuilles des agents.
(6) Peut-on subtituer à cette finance directe où les ménages détiennent les actions des entreprises de la finance intermédiée où les entreprises sont possédées par des fonds, les ménages ne détenant que des parts des fonds.

Exercice 8 *L'économie est la même que celle de l'exercice 6 précédent, mais Robinson préfère proposer à Vendredi et à Daniel Defoe de mettre en place un système financier comprenant un marché du crédit sur lequel on peut prêter*

ou emprunter au taux d'intérêt r, d'un marché de l'assurance sur lequel on peut librement acheter une indemnité I en cas de dommages pour une prime unitaire q.
(1) En supposant sans perte de généralité que les contrats d'assurance sont offerts par une unique compagnie d'assurance (preneuse de prix), déterminez la valeur à l'équilibre de q.
(2) Déterminez les contraintes budgétaires de chaque agent.
(3) L'allocation d'équilibre peut-elle être efficace au sens de Pareto ?
(4) Déterminer le taux d'intérêt r d'équilibre.
(4) Calculez l'épargne et l'indemnité de chaque agent à l'équilibre.