

Exercices sur la décision dans l'incertain

Philippe BERNARD
Ingénierie Economique et Financière
Paris-Dauphine

Octobre 2007

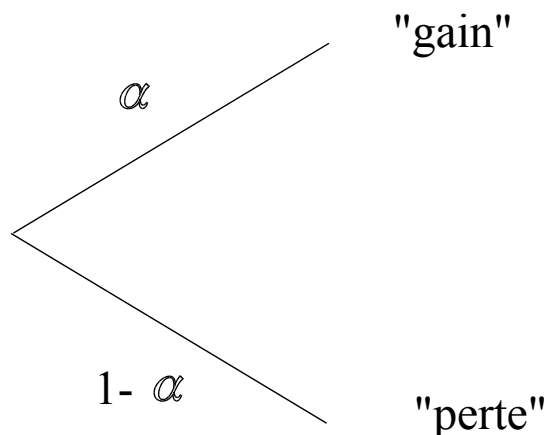


FIG. 1 – La loterie soumise au gérant de portefeuille.

1 Exercice 1 : révélation des préférences et construction de la fonction d'utilité

(exercice tiré de Hamon [2004] "Bourse et Gestion de Portefeuille", d'après l'ouvrage de Copeland & Weston [1983])

Une série de 11 questions est soumise à un gérant de portefeuille. Chaque question consiste à soumettre à ce gérant le choix entre participer à une loterie et ne pas participer. La loterie est définie par deux prix, dont le plus élevé (le "gain") a une probabilité α de se réaliser comme l'illustre la figure 1.

Ainsi on soumet en premier une loterie dont le "gain" est 1000\$ et dont la perte est également de 1000\$. On demande alors au gérant de déterminer la probabilité minimale α qui le rendrait indifférent entre participer à cette loterie et ne pas participer (et donc avoir une utilité normalisée à 0).

Les différentes loteries proposées sont celles du tableau 1 qui suit, les réponses sont celles qui y sont reportées.

Pour interpréter les réponses on suppose que :

- les préférences de l'agent sont supposées vérifier l'axiomatique de l'utilité espérée, et donc que l'utilité U de l'agent s'écrit

$$U = \alpha \times u(\text{gain}) + (1 - \alpha) \times u(\text{perte}) \quad (1)$$

où u est l'utilité élémentaire ;

- la non-participation définit un niveau d'utilité nulle

$$u(0) = 0$$

TAB. 1 – Les loteries proposées et les réponses du gérant de portefeuille

loterie	gain	perte	α
1	1000	-1000	0.6
2	2000	-1000	0.55
3	3000	-1000	0.5
4	4000	-1000	0.45
5	5000	-1000	0.4
6	6000	-1000	0.35
7	7000	-1000	0.30
8	2000	-2000	0.75
9	3000	-3000	0.80
10	4000	-4000	0.85
11	5000	-5000	0.90

source : Hamon [2004] p. 135

– l'utilité élémentaire d'une perte de 1000 est normalisée à -10 .

(1) Déterminer à l'aide de ces conventions et du tableau 1 les niveaux d'utilité élémentaires des différents revenus (pertes ou gains).

(2) Tracer à l'aide de ces résultats la fonction d'utilité élémentaire du gérant de portefeuille sondé.

(3) (à ne traiter qu'après la présentation de la notion d'aversion à l'égard du risque) Le gérant est-il averse au risque ? Est-il joueur ? A quels niveaux de revenus ?

(4) Répondez vous aussi au questionnaire et répondez aux questions 1,2 et 3.

2 Exercice 2 : Paradoxe de Allais

(1) Parmi les deux loteries suivantes :

a_1 : recevoir certainement 100.000 francs

$$a_2 : \begin{cases} \text{recevoir } 500.000Fr \text{ avec la probabilité } 0.10 \\ \text{recevoir } 100.000Fr \text{ avec la probabilité } 0.89 \\ \text{ne rien recevoir avec la probabilité } 0.01 \end{cases}$$

quelle est votre loterie préférée

(2) Parmi les deux autres loteries suivantes :

$$a_3 : \begin{cases} \text{recevoir } 100.000Fr \text{ avec la probabilité } 0.11 \\ \text{ne rien recevoir avec la probabilité } 0.89 \end{cases}$$

$$a_4 : \begin{cases} \text{recevoir } 500.000\text{Fr avec la probabilité } 0.10 \\ \text{ne rien recevoir avec la probabilité } 0.90 \end{cases}$$

laquelle préférez vous ?

(3) Démontrer que préférer d'une part a_1 à a_2 , et d'autre part a_4 à a_3 est incompatible avec l'utilité espérée.

3 Exercice 3 : Prix d'une loterie

On propose à un individu l'achat d'une loterie dont les gains équiprobables sont 12 et 0. La fonction d'utilité élémentaire de l'agent est $u(w_0, w_1) = w_0 + \sqrt{w_1}$, où w_0 et w_1 sont ses revenus avant et après le tirage de la loterie. Les revenus initiaux de l'agent sont $w_0 = 10$ et $w_1 = 4$.

(1) En supposant que le prix p de la loterie est payé avant le tirage de celle-ci, quel est le prix maximum que celui-ci est prêt à payer ?

(2) On suppose que le prix est payé après le tirage de la loterie. Déterminer le nouveau prix maximum p .

4 Exercice 4 : Choix de portefeuille

On considère un gérant de portefeuille dont l'objectif est de maximiser l'utilité espérée de leur richesse finale, la fonction d'utilité élémentaire étant la fonction quadratique suivante :

$$u(w) = -\frac{1}{2}(\chi - w)^2$$

où w est la richesse terminale (à l'issue de la période d'investissement sur le marché), χ un paramètre positif.

(1) Si l'on note W_0 la richesse dont dispose le gérant initialement, montrer que l'utilité espérée (espérance mathématique de u) n'est fonction de que du rendement brute du portefeuille investi ($\mathbf{E}[\tilde{R}_p]$) et de sa variance (σ_R^2). On prendra $\chi = 1000$, $W_0 = 100$, et naturellement :

$$w = W_0 \times R_p$$

(2) Les actions dans lesquels l'agent peut investir sa richesse initiale sont définies par leurs types et leurs secteurs. Comme le montre le tableau 4, il existe deux types de titres : celles des petites capitalisations (small values) et celles des grandes (big values) dont les rendements moyens et écart-types

TAB. 2 – Un ensemble d’actifs disponibles : exemple

	small values		big values	
	rend. moyen	écart- type	rend. moyen	écart- type
secteur i	16%	32%	10%	20%

TAB. 3 – La matrice corrélation des titres selon les secteurs : exemple

	secteur A	secteur C	secteur E
secteur A	1	0	-1
secteur C		1	0
secteur E			1

correspondent approximativement aux données américaines de la période 1926-1998. Une seconde dimension des titres est le secteur d’activité des entreprises. Certains secteurs sont étroitement corrélés entre eux, d’autres plus faiblement, enfin d’autres peuvent être même négativement corrélés.

On supposera pour simplifier que l’on cherche à construire un portefeuille comprenant uniquement des big values du secteur A que l’on combine à des small values des différents secteurs.

(a) Déterminer en fonction de α , la part investie dans les small values sélectionnés, et de ρ , la corrélation entre les deux types de titres composant le portefeuille, le rendement espéré du portefeuille, sa variance.

(b) Pour chacun des trois corrélations possibles ($\rho = 1$, $\rho = 0$, $\rho = -1$), et en faisant varier α de 0 à 1, tracer les couples écart-type / rendements espérés obtenus.

(c) Comment peut-on expliquer la forme obtenue pour $\rho = 1$ et pour $\rho = -1$?

(3) Déterminer le portefeuille optimal en utilisant les préférences de (1) pour $\rho = -0.5$.