Microéconomie - licence

Exercices sur l'équilibre général intertemporel

Philippe Bernard
Ingénierie Economique et Financière

1 Réallocation intertemporelle

L'économie comprend trois périodes $t = 0, 1, 2$ (avec un bien périssable par période), deux agents : Robinson (r) et Vendredi (v). Les deux agents ont des préférences représentées par la fonction d'utilité :

$$U = u\left(c_0^i\right) + \beta u\left(c_1^i\right) + \beta^2 u(c_2^i)$$

avec :

$$u(c) = \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

où σ est l'élasticité de substitution intertemporelle, β le facteur d'actualisation intertemporelle. Numériquement :

$$\beta = \frac{4}{5},\ \sigma = 1/2$$

Les dotations des deux individus sont les suivantes :

t	0	1	2
Robinson	60	80	100
Vendredi	80	40	0

(1) Définissez le programme des allocations Pareto-optimales de l'économie.
(2) Construisez le lagrangien associé à ce programme et déterminez les conditions de premier ordre des allocations Pareto-optimales.
(3) Caractérisez la courbe des contrats, i.e. donnez l'expression des consommations de Robinson de la période 1 en fonction de celle de la période 0, de celles de la période 2 en fonction de la période 1 solutions du programme de la question 1.
(4) En notant Ω_t la dotation globale à la période t, en reprenant les conditions de premier ordre, montrez que les allocations efficaces sont obtenus par un partage linéaire de cette dotation globale à chaque période :

$$c_t^r = k.\Omega_t,\ c_t^v = (1-k).\Omega_t$$

où c_t^r et c_t^v sont les consommations de Robinson et de Vendredi à la période t, et où k est un réel compris entre 0 et 1 **qui a la même valeur** à chaque période.

2 Equilibre avec marchés financiers

On considère une économie d'échanges peuplée de deux agents A et B vivant deux périodes $t = 0, 1$. A chaque période, il existe un unique bien de consommation. Les consommations des deux agents sont notées c_0^A, c_1^A, c_0^B et c_1^B, leurs dotations sont ω_0^A, ω_1^A, ω_0^B, ω_1^B. Les dotations globales de l'économie sont notées respectivement Ω_1 et Ω_2 - avec évidemment $\Omega_0 = \omega_0^A + \omega_0^B$, $\Omega_1 = \omega_1^A + \omega_1^B$. Les préférences des deux agents sont représentées par les fonctions Cobb - Douglas suivantes :

$$agent\ A : u_A = \left(c_0^A\right)\left(c_1^A\right)^\beta,\ avec\ 0 < \beta < 1$$

$$agent\ B : u_B = \left(c_0^B\right)\left(c_1^B\right)^\beta,\ avec\ 0 < \beta < 1$$

Pour réallouer les ressources, les agents mettent en place à la période 0 un marché financier sur lequel on peut prêter ou emprunter pour une période au taux d'intérêt r.

Les valeurs numériques sont :

$$\beta = \frac{10}{11},\ \omega_0^A = 50,\ \omega_1^A = 125,\ \omega_0^B = 150,\ \omega_1^B = 75$$

Partie I.
(1) Ecrire le problème de chaque agent et déterminer sa demande.
(2) Calculer le prix et les consommations d'équilibre de l'économie.
(3) Calculer le prix d'équilibre de l'économie lorsque celle-ci ne comprend qu'un agent dit représentatif dont la fonction d'utilité est :

$$agent\ représentatif : u_{AR} = \left(c_1^{AR}\right)\left(c_2^{AR}\right)^\beta,\ avec\ 0 < \beta < 1$$

et dont les dotations sont (Ω_1, Ω_2).
(4) Montrer graphiquement que l'existence d'un tel agent représentatif est notamment la conséquence du fait que le Tms est homogène de degré 0.

Partie II.

On suppose que les fonctions d'utilité des deux agents sont de la forme quadratique suivante :

$$U_i\left(c_0^i, c_1^i\right) = -\frac{1}{2}[\chi_0^i - c_0^i]^2 - \beta\frac{1}{2}[\chi_1^i - c_1^i]^2$$

avec $0 < \beta < 1$. Les valeurs numériques sont :

$$\beta = \frac{10}{11},\ \chi_0^A = 300,\ \chi_1^A = 200,\ \chi_0^B = 200,\ \chi_1^B = 300$$

(1) Représentez les courbes d'indifférence de l'agent A. Que représente le

point $\left(\chi_0^A, \chi_1^A\right)$?
(2) Déterminer le taux d'intérêt d'équilibre.
(3) Démontrer qu'il existe un agent représentatif dont la fonction d'utilité est :

$$U[c(0), c(1)] = -\frac{1}{2}[\chi_0^A + \chi_0^B - c_0]^2 - \beta\frac{1}{2}[\chi_1^A + \chi_1^B - c_1]^2$$

(Le résultat est obtenu en faisant le changement de variable : $x_t^i = c_t^i - \chi_t^i$ et en appliquant au Tms calculé avec ces variables x_0^i et x_1^i les raisonnements utilisés à la question (4) de la partie I)

3 Equilibre intertemporel avec production

Considérons une économie qui comporte un bien physique non stockable, 2 périodes ($t = 0, 1$), N consommateurs ($i = 1, ..., N$) et une entreprise. La fonction de production est : $q = ak^\gamma$ avec $0 < \gamma < 1$, où k représente l'investissement à la date 0 de l'entreprise, la production est réalisée et vendue en 1. A la date $t = 0$ les dotations initiales de l'agent i sont ω_i. La fonction d'utilité commune à tous les agents est :

$$U_i[c_i(0), c_i(1)] = \ln c_i(0) + \beta \ln c_i(1), \text{ avec } 0 < \beta < 1$$

Chaque consommateur partage initialement ses ressources intiales entre la consommation et l'investissement et détient une part θ_i de l'entreprise. Il existe un marché financier parfait sur lequel les agents peuvent prêter ou emprunter au taux d'intérêt r.
(1) Déterminez les contraintes budgétaires des consommateurs.
(2) Calculez l'investissement optimal de l'entreprise.
(3) Que vaut l'entreprise (en fonction de r)
(4) Calculer le taux d'intérêt d'équilibre de cette économie.

4 Chocs, ajustement de l'équilibre et comportements d'épargne

L'économie comprend deux périodes $t = 0, 1$ (avec un bien par période), deux pays : l'Europe et les Etats-Unis. Les deux pays sont supposés puvoir être résumées par deux agents : Europe et Oncle Sam. Les deux agents ont des préférences représentées par la fonction d'utilité :

$$U = u(c_0) + \beta u(c_1)$$

avec :

$$u(c) = \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

où σ est l'élasticité de substitution intertemporelle.

Les deux agents disposent initialement des mêmes dotations :

$$\Omega_0^{eu} = \Omega_0^{us} = 100$$

et de la même technologie. La dotation peut être consommée, échangée ou investie. La technologie l'utilise pour obtenir du bien de la période 1 et elle est résumée par la fonction de production suivante :

$$Q_1^i = \theta_i (k_i)^\gamma, \ i = eu, us$$

$$\gamma = 1/2, \ \theta_{eu} = \theta_{us} = 1$$

Les deux pays sont en libre échange et peuvent échanger les biens sur des marchés en concurrence pure et parfaite. Ils peuvent également réallouer intertemporellement leurs ressources grâce à un marché financier sur lequel les agents peuvent prêter et emprunter au taux d'intérêt r.
(1) Déterminez l'équilibre général pour $\beta = .8$, $\sigma = 1/2$, $\gamma = 1/2$ (taux d'intérêt, investissements, productions, capitalisations boursières). Calculer le solde de la balance des paiements courants de chaque pays.
(2) Europe anticipe que le paramètre de productivité θ_{eu} qui varie en passant de 1 à 1.2. Recalculer l'équilibre.