

Exercice sur la demande en présence d'un impôt indirect

Philippe Bernard
Ingénierie Economique et Financière
Université Paris-Dauphine

Septembre 2008

On considère un agent dont la fonction d'utilité est :

$$U = (c_1)^{\frac{1}{4}}(c_2)^{\frac{3}{4}}$$

et dont la dotation est $\omega = (100, 200)$. Les prix (avant taxes) des biens sont $p = (1, 2)$. Les ventes de ces biens sont taxés à un taux de 50%.

- (1) Déterminer les prix d'achat et des ventes des biens.
- (2) Déterminer les consommations optimales en recourant directement aux conditions marginales.
- (3) Déterminer le lagrangien à utiliser et ses solutions.

(1) Les prix donnés initialement sont les prix de vente que percevront les vendeurs. Les prix d'achat sont obtenus en appliquant les taux d'imposition. Par conséquent on obtient :

	vente	achat
bien 1	1	1.5
bien 2	2	3

(1)

(2) Pour l'agent considéré, sachant qu'il ne peut acheter le bien 1 que s'il vend du bien 2, et vice versa, les seules contraintes budgétaires possibles définies sur les achats (notées z_i^+) et les ventes (notées z_i^-) des biens $i = 1, 2$, sont :

- vente du bien 1 (pour financer l'achat du bien 2)

$$3.z_2^+ \leq 1.z_1^- \quad (2)$$

- vente du bien 2

$$1.5z_1^+ \leq 2z_2^- \quad (3)$$

Comme les consommations finales sont obtenus des dotations en retranchant les quantités vendues et en ajoutant les quantités achetées :

$$c_i = \omega_i - z_i^- + z_i^+ \quad (4)$$

on a donc, après substitutions, les contraintes budgétaires suivantes :

- si vente du bien 1

$$\left. \begin{array}{l} z_1^- > 0, z_1^+ = 0 \\ z_2^+ > 0, z_2^- = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 100 - z_1^- \\ c_2 = 200 + z_2^+ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1^- = 100 - c_1 \\ z_2^+ = c_2 - 200 \end{cases}$$

et donc après injection dans $3.z_2^+ \leq 1.z_1^-$, on obtient la contrainte budgétaire suivante

$$3.(c_2 - 200) \leq (100 - c_1)$$

$$3c_2 + c_1 \leq 700$$

$$c_2 \leq \frac{700}{3} - \frac{1}{3}c_1$$

– si vente du bien 2

$$\left. \begin{array}{l} z_2^- > 0, z_2^+ = 0 \\ z_1^+ > 0, z_1^- = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 100 + z_1^+ \\ c_2 = 200 - z_2^- \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1^+ = c_1 - 100 \\ z_2^- = 200 - c_2 \end{cases}$$

et donc après injection dans $1.5z_1^+ \leq 2.z_2^-$, on obtient la contrainte budgétaire suivante

$$1.5(c_1 - 100) \leq 2(200 - c_2)$$

$$1.5c_1 + 2c_2 \leq 550$$

$$c_2 \leq 275 - \frac{3}{4}c_1$$

Par conséquent, la contrainte budgétaire (par morceaux) que doit vérifier le consommateur est la suivante :

$$\begin{cases} c_1 \leq 100 \Rightarrow c_2 \leq \frac{700}{3} - \frac{1}{3}c_1 \\ c_1 \geq 100 \Rightarrow c_2 \leq 275 - \frac{3}{4}c_1 \end{cases} \quad (5)$$

On vérifie bien que le point de dotation appartient aux deux segments de la contrainte budgétaire dont les pentes en valeurs absolues sont respectivement $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$. Ces deux valeurs représentent le prix relatif de vente du bien 1 ($1/3$) et le prix relatif d'achat du bien 1 ($3/4$). L'impact de l'impôt est naturellement d'introduire un écart entre le prix de revient de la vente et le coût d'achat du bien.

Pour résoudre le problème, on suppose que ses solutions sont intérieures :

Hypothèse 1 $c_1 > 0, c_2 > 0$.

Si cette hypothèse n'était pas vérifiée par les solutions trouvées, on serait amené à explorer les solutions en coin possibles (soit avec $c_1 = 0$, soit avec $c_2 = 0$).

Pour déterminer la solution à l'aide des conditions marginales, on évalue tout d'abord le Tms au point de dotation. Comme

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = \frac{1}{4} \frac{U}{c_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial c_2} = \frac{3}{4} \frac{U}{c_2} \quad (6)$$

la valeur marginale du bien 1 estimée en bien 2 est donc :

$$Tms_{2 \rightarrow 1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial c_1}}{\frac{\partial U}{\partial c_2}} = \frac{\frac{1}{4} \frac{U}{c_1}}{\frac{3}{4} \frac{U}{c_2}} = \frac{1}{3} \frac{c_2}{c_1} \quad (7)$$

Au point de dotation, la valeur du Tms est donc :

$$Tms_{2 \rightarrow 1}(\omega) = \frac{1}{3} \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{3} \frac{200}{100} = \frac{2}{3} \quad (8)$$

Par conséquent au point de dotation, lorsque l'on compare ce Tms aux deux prix relatifs des contraintes budgétaires on a :

$$\frac{1}{3} < Tms_{2 \rightarrow 1}(\omega) < \frac{3}{4} \quad (9)$$

La valeur marginale accordée par le consommateur au bien 1 est plus faible que son prix d'achat ($3/4$) : par conséquent il n'achètera pas de ce bien au point de dotation. Mais le gain relatif de le vendre sur le marché ($1/3$) est aussi inférieur au coût supporté par l'agent (Tms). Par conséquent, au point de dotation, l'agent ne souhaite ni vendre, ni acheter le bien 1. On déduit que :

$$c_1 = 100, \quad c_2 = 200$$

(3) Résolution à l'aide du lagrangien

Le programme complet du consommateur est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{c_1, c_2} (c_1)^{\frac{1}{4}} (c_2)^{\frac{3}{4}} \\ \text{sous les contraintes} \\ c_1 \geq 0 \\ c_2 \geq 0 \\ c_1 + 3c_2 \leq 700 \\ 1.5c_1 + 2c_2 \leq 550 \end{array} \right. \quad (10)$$

Le lagrangien associé à ce programme s'écrit :

$$L = (c_1)^{\frac{1}{4}} (c_2)^{\frac{3}{4}} + \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 - \lambda_1 (c_1 + 3c_2 - 700) - \lambda_2 (1.5c_1 + 2c_2 - 550) \quad (11)$$

où $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$ sont les multiplicateurs de lagrange associés aux contraintes budgétaires.

Si l'on suppose que les solutions sont là-aussi intérieures alors :

$$c_1 > 0 \Rightarrow \mu_1 = 0, \quad c_2 > 0 \Rightarrow \mu_2 = 0 \quad (12)$$

et donc le lagrangien se réduit à :

$$L = (c_1)^{\frac{1}{4}}(c_2)^{\frac{3}{4}} - \lambda_1(c_1 + 3c_2 - 700) - \lambda_2(1.5c_1 + 2c_2 - 550) \quad (13)$$

Si la solution était de donner une consommation c_1 supérieure à 100, alors seule la seconde contrainte budgétaire serait active et donc on serait dans le cas où $\lambda_1 = 0$. Dans ce cas, on aurait :

$$L = (c_1)^{\frac{1}{4}}(c_2)^{\frac{3}{4}} - \lambda_2(1.5c_1 + 2c_2 - 550) \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_2} = 0 \\ 1.5c_1 + 2c_2 - 550 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(c_1)^{-\frac{3}{4}}(c_2)^{\frac{3}{4}} - 1.5\lambda_2 = 0 \\ \frac{3}{4}(c_1)^{\frac{1}{4}}(c_2)^{-\frac{1}{4}} - 2\lambda_2 = 0 \\ 1.5c_1 + 2c_2 - 550 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

En faisant le rapport des deux équations :

$$3\frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow c_2 = \frac{9}{4}c_1$$

et donc :

$$\begin{aligned} 1.5c_1 + 2\left(\frac{9}{4}c_1\right) - 550 &= 0 \Rightarrow 1.5c_1 + (4.5c_1) = 550 \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{550}{6} \\ \Rightarrow c_2 &= \frac{550 - 1.5c_1}{2} = \frac{550 - 1.5\left(\frac{550}{6}\right)}{2} = \frac{825}{4} \end{aligned}$$

La solution trouvée : $c_1 = \frac{550}{6}$, $c_2 = \frac{825}{4}$, vérifie les contraintes de positivité des consommations mais elle ne respecte pas l'hypothèse de départ, à savoir que la consommation du bien 1 est supérieure à la dotation (100).

Par conséquent, on est contraint de proposer un autre régime. Supposons donc que la solution soit dans le régime où la consommation de bien 1 est inférieure strictement à la dotation. Le lagrangien se réduit dans ce cas à :

$$L = (c_1)^{\frac{1}{4}}(c_2)^{\frac{3}{4}} - \lambda_1(c_1 + 3c_2 - 700) \quad (17)$$

Avec cette version réduite, les solutions sont données par ce système :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(c_1)^{-\frac{3}{4}}(c_2)^{\frac{3}{4}} - \lambda_1 = 0 \\ \frac{3}{4}(c_1)^{\frac{1}{4}}(c_2)^{-\frac{1}{4}} - 3\lambda_1 = 0 \\ c_1 + 3c_2 = 700 \end{cases} \quad (18)$$

En rapportant la seconde à la première équation, on trouve :

$$3\frac{c_1}{c_2} = 3 \Rightarrow c_1 = c_2$$

D'où après substitution dans la contrainte budgétaire, on obtient :

$$(c_2) + 3c_2 = 700 \Rightarrow c_2 = \frac{700}{4} = 175 = c_1$$

Là aussi on a une solution mathématique qui ne respecte pas l'hypothèse de départ puisque $c_1 = 175 > 100 = \omega_1$.

Par conséquent, pour les solutions intérieures, la seule solution possible est celle où les deux contraintes sont vérifiées simultanément :

$$c_1 + 3c_2 = 700$$

$$1.5c_1 + 2c_2 = 550$$