Microéconomie - Licence
Pré-rentrée - exercices

Philippe Bernard
EURIsCO
Université Paris IX Dauphine

Septembre 2005

Remarque 1 *Les corrigés accompagnant les exercices sont succincts, et peuvent comportés des coquilles, voire quelques erreurs. Outre les exercices qui suivent, on pourra trouver des exercices similaires dans les manuels de Premier Cycle, par exemple Guerrien & Nezeys "Microéconomie et calcul économique" ou Picard "Eléments de microéconomie"*

1 Intitulés

1.1 Exercice I : Détermination des demandes avec trois biens

On considère un agent dont les préférences sont définies sur les trois biens de consommation 1, 2 et 3 et sont réprésentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U = U(c_1, c_2, c_3) = c_1^\alpha c_2^\beta c_3^\gamma$$

Les marchés des trois biens sont en concurrence pure et parfaite. Les prix régissant les transactions sur les trois marchés sont notées p_1, p_2 et p_3. Le revenu de l'agent est d'abord suupposé exogène et égal à w.

(1) Montrez que les fonctions $V = \alpha \ln(c_1) + \beta \ln(c_2) + \gamma \ln(c_3)$, $W = c_1^{\theta_1} c_2^{\theta_2} c_3^{\theta_3}$ avec $\theta_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\theta_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\theta_3 = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$, représentent également les préférences de l'agent.

(2) Ecrire la contrainte budgétaire de l'agent, son programme.

(3) Calculer les Tms de l'agent.

(4) Donner les conditions marginales de ses choix optimaux. Les choix optimaux peuvent-ils être des solutions en coin ?

(5) En supposant que $\alpha + \beta + \gamma = 1$, calculer les fonctions de demandes de l'agent.

(6) Que représentent dans les fonctions de demande les coefficients α, β, et γ ?

1.2 Exercice II : Offre concurrentielle

Une entreprise combine le travail (L) et le capital (K) dont les quantités sont respectivement notées L et K, pour produire un bien de consommation en utilisant une technique de production résumée par la fonction de production :

$$Q = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

Le prix du bien est noté p, celui du travail w, celui du capital r.

(1) Ecrire le programme de maximisation du profit.

(2) Donner les conditions que doivent vérifier les choix optimaux de travail (L) et de capital (K).

(3) Déterminer la fonction d'offre de bien en fonction de p, de w et de r.

(4) Déterminer les fonctions de demande de travail et de capital en fonction de p, de w et de r.

1.3 Exercice III : Fonction de coût total

Une entreprise combine le travail (L) et le capital (K) dont les quantités sont respectivement notées L et K, pour produire un bien de consommation en utilisant une technique de production résumée par la fonction de production :

$$Q = K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}} \tag{2}$$

Le prix du travail est notée w, celui du capital r.

(1) Donner le programme de minimisation des coûts du producteur.

(2) Rappeler les conditions que doivent vérifier les choix optimaux minimisant les coûts.

(3) Déterminer la fonction de coût total de l'entreprise.

(4) Quelle est la fonction d'offre du producteur ?

1.4 Exercice IV : Equilibre général dans une économie d'échanges, 1

On considère une économie d'échanges comprenant deux biens 1 et 2, deux agents A et B dont les préférences :

$$U_A = (c_1^B)^{\frac{3}{4}}(c_2^B)^{\frac{1}{4}} \tag{3}$$

$$U_B = (c_1^A)^{\frac{3}{4}}(c_2^A)^{\frac{1}{4}} \tag{4}$$

et les dotations des deux agents sont :

	bien 1	bien 2
agent A	100	150
agent B	200	300

(1) Déterminer les demandes des deux agents.
(2) Déterminer les prix d'équilibre.
(3) Calculer les consommations à l'équilibre.
(4) Partant de cet équilibre, peut-on simultanément améliorer la situation des deux agents ?

1.5 Exercice V : Equilibre général dans une économie d'échanges, 2

On considère une économie d'échanges comprenant deux biens notés 1 et 2, deux agents A et B dont les fonctions d'utilité sont :

$$U^A = 12\ln\left(c_1^A\right) + 6\ln\left(c_2^A\right)$$

$$U^B = \ln\left(c_1^B\right) + \frac{1}{2}\ln\left(c_2^B\right)$$

où c_1^A et c_2^A sont les consommations en biens 1 et 2 de l'agent A, c_1^B et c_2^B les consommations en biens 1 et 2 de l'agent B. Les dotations des agents A et B sont respectivement $(150, 0)$ et $(50, 100)$. Le bien 2 est pris comme numéraire, le prix du bien 1 est noté p.

1. Déterminez les demandes des agents A et B en fonction de p.
2. Calculez le prix et les quantités d'équilibre (de CPP).
3. Donnez le programme définissant les différentes allocations optimales au sens de Pareto.
4. Déterminez la courbe des contrats, calculez les prix parétiens.

1.6 Exercice VI : Equilibre général dans une économie d'échanges comprenant trois biens

L'économie comprend trois biens : deux biens de consommation, les biens 1 et 2, et la monnaie, trois agents : a, b et c. Ceux-ci reçoivent intialement des dotations dont les valeurs numériques sont suivantes :

dotations	bien 1	bien 2	monnaie
agent a	200	50	200
agent b	400	150	0
agent c	0	100	100

Leurs préférences sont résumées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U_a = (c_1^a)^{\frac{1}{2}}\,(c_2^a)\,(M^a)^{\frac{1}{2}}$$

$$U_b = \frac{1}{4}\ln\left(c_1^b\right) + \frac{1}{2}\ln\left(c_2^b\right) + \frac{1}{4}\ln\left(M^b\right)$$

$$U_c = (c_1^c)^{\frac{1}{8}}\,(c_2^c)^{\frac{1}{4}}\,(M^c)^{\frac{1}{8}}$$

Les agents ont accès à des marchés en concurrence pure et parfaite sur lesquels ils peuvent échanger ces trois biens. On suppose que la monnaie est pris comme numéraire : $p_M = 1$. Les prix des deux autres biens : p_1 et p_2 sont déterminés à l'équilibre.

Déterminer l'équilibre général walrassien de cette économie.

1.7 Exercice VII : Equilibre général avec production

On considère une économie de production comportant deux biens de consommation 1 et 2 produit à l'aide du travail par deux entreprises dont les techniques de production sont :

$$Q_1 = \sqrt{L_1},\ Q_2 = \sqrt{2L_2}$$

Le travail est offert par deux ménages A et B dont les fonctions d'utilité différentes sont :

$$U_A = \left(c_1^A\right)^{\frac{2}{3}}\left(c_2^A\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$U_B = \frac{1}{6}\ln\left(c_1^B\right) + \frac{1}{12}\ln\left(c_2^B\right)$$

Chaque ménage dispose de 100 unités de travail et possède la moitié des profits. On prend comme numéraire le prix du travail et on note p_1 et p_2 les prix des deux biens. Déterminez les prix d'équilibre.

1.8 Exercice VIII : Equilibre général et optimalité de Pareto dans une économie de production

On considère une économie d'échanges comprenant deux biens notés 1 et 2, deux agents A et B dont les fonctions d'utilité sont :

$$U^A = 2\ln\left(c_1^A\right) + \ln\left(c_2^A\right),\ U^B = \left(c_1^B\right)^{\frac{2}{3}}\left(c_2^B\right)^{\frac{1}{3}}$$

où c_1^A et c_2^A sont les consommations en biens 1 et 2 de l'agent A, c_1^B et c_2^B les consommations en biens 1 et 2 de l'agent B. Les biens 1 et 2 sont produits par deux entreprises (également nommés 1 et 2) à l'aide d'un unique facteur de production : le travail. Les fonctions de production sont :

$$q_1 = 0.5l_1,\ q_2 = \sqrt{l_2}$$

Le travail est pris comme numéraire, les prix des autres biens sont notés p_1 et p_2. Chaque agent i - $i = A, B$, dispose de 50 unités de travail qu'ils offrent sur le marché du travail pour augmenter leurs revenus. L'agent A reçoit la totalité des profits de l'entreprise 1, le tiers des profits de l'entreprise 2, l'agent B le reste.

1. Déterminez les demandes des agents A et B.
2. Calculez les prix et les quantités d'équilibre.
3. On suppose désormais que les profits sont totalement redistribués à l'agent A. Caculez les nouveaux prix d'équilibre. Comparez les à ceux de la question précédente. Expliquez leurs évolutions.
4. Déterminer la frontière de production de l'économie ainsi que son TTP. Tracez la frontière de production. Expliquez sa forme.
5. Donnez le programme caractérisant les allocations optimales de cette économie de production.
6. Déterminez la courbe des contrats.

2 Eléments de correction

2.1 Exercice I : Détermination des demandes avec trois facteurs

(1) évident puisque :

$$U = \exp V = W^{\alpha+\beta+\gamma}$$

Par conséquent, comme exp et $(.)^{\alpha+\beta+\gamma}$ sont des fonctions croissantes, on a :

$$\begin{aligned} U(c_1, c_2, c_3) &> U(c_1', c_2', c_3') \Leftrightarrow V(c_1, c_2, c_3) > V(c_1', c_2', c_3') \\ &\Leftrightarrow W(c_1, c_2, c_3) > W(c_1', c_2', c_3') \end{aligned}$$

Les courbes d'indifférence sont les mêmes, leurs équation étant quasi-identiques dans les trois cas :

$$c_3 = c_1^{-\frac{\alpha}{\gamma}} c_2^{-\frac{\beta}{\gamma}} U^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$c_3 = c_1^{-\frac{\alpha}{\gamma}} c_2^{-\frac{\beta}{\gamma}} \exp\left(\frac{1}{\gamma} V\right)$$

$$c_3 = c_1^{-\frac{\theta_1}{\theta_3}} c_2^{-\frac{\theta_2}{\theta_3}} W^{\frac{1}{\theta_3}}$$

Comme $U = \exp V$, la seconde équation est identique à la première. Comme $\frac{\theta_1}{\theta_3} = \frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\theta_2}{\theta_3}$, $U = W^{\alpha+\beta+\gamma}$, la troisième équation est identique à la première. Les courbes d'indifférence définies par les trois fonctions U, V, W sont donc les mêmes.

(2) Le programme de l'agent :

$$\begin{cases} \max\ U \\ \textit{sous les contraintes} : \\ p_1 c_1 + p_2 c_2 + p_3 c_3 = w \\ c_1 \geq 0 \\ c_2 \geq 0 \\ c_3 \geq 0 \end{cases}$$

(3) Il existe trois biens donc on doit avoir au moins deux Tms à expliciter. Par exemple si l'on prend comme référence le bien 1 les deux Tms suivants :

$$\begin{aligned} Tms_{1\to 2} &= \frac{\partial U/\partial c_2}{\partial U/\partial c_1} = \frac{\beta c_1^{\alpha} c_2^{\beta-1} c_3^{\gamma}}{\alpha c_1^{\alpha-1} c_2^{\beta} c_3^{\gamma}} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{c_1}{c_2} \\ Tms_{1\to 3} &= \frac{\partial U/\partial c_3}{\partial U/\partial c_1} = \frac{\gamma c_1^{\alpha} c_2^{\beta} c_3^{\gamma-1}}{\alpha c_1^{\alpha-1} c_2^{\beta} c_3^{\gamma}} = \frac{\gamma}{\beta}\frac{c_1}{c_3} \end{aligned}$$

(4) Pour les solutions en coin les Tms tendent soit vers des valeurs infinies :

$$c_2 \to 0,\ c_1 > 0 \Rightarrow Tms_{1\to 2} \to +\infty$$

$$c_3 \to 0,\ c_1 > 0 \Rightarrow Tms_{1\to 3} \to +\infty$$

soit sont nulles :

$$c_2 > 0,\ c_1 = 0 \Rightarrow Tms_{1\to 2} = 0$$

$$c_3 > 0,\ c_1 = 0 \Rightarrow Tms_{1\to 3} = 0$$

Evidemment au moins une des trois consommations est strictement positives. Les deux derniers cas assurent que l'on ne peut avoir $c_1 = 0$ lorsque $c_2 > 0$ ou / et $c_3 > 0$. Par conséquent, $c_1 > 0$. Les deux premiers assurent qu'aucune des deux consommations c_2 ou c_3 ne peuvent être nulles.

Par conséquent, les choix sont nécessairement intérieurs. Et les conditions marginales sont :

$$Tms_{1\to 2} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{c_1}{c_2} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$Tms_{1\to 3} = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{c_1}{c_3} = \frac{p_3}{p_1}$$

(5) Les fonctions de demande sont données par les solutions du système :

$$\begin{cases} Tms_{1\to 2} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{c_1}{c_2} = \frac{p_2}{p_1} \\ Tms_{1\to 3} = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{c_1}{c_3} = \frac{p_3}{p_1} \\ p_1 c_1 + p_2 c_2 + p_3 c_3 = w \end{cases}$$

i.e. lorsqu'il existe L biens par un système comprenant $L-1$ conditions marginales (**définies par rapport au même bien de référence, 1 ici**) et la contrainte budgétaire. Les demandes sont obtenues en trois étapes :

1. les conditions marginales permettent d'obtenir en fonction du bien de référence (c_1) les consommations des autres biens (c_2 et c_3) :

$$\left\{\begin{array}{llll} Tms_{1\to 2} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{c_1}{c_2} = \frac{p_2}{p_1} & \Rightarrow & c_2 = \frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}c_1 \\ Tms_{1\to 3} = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{c_1}{c_3} = \frac{p_3}{p_1} & \Rightarrow & c_3 = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{p_1}{p_3}c_1 \end{array}\right.$$

2. la substitution dans la contrainte budgétaire permet d'obtenir la demande du bien de référence :

$$p_1c_1 + p_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}c_1\right) + p_3\left(\frac{\gamma}{\alpha}\frac{p_1}{p_3}c_1\right) = w$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad c_1 &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{w}{p_1} \\ \Rightarrow \quad c_1 &= \alpha\frac{w}{p_1} \end{aligned}$$

3. les demandes des autres biens sont alors obtenues en utilisant la demande du bien de référence et les relations déduites des conditions marginales :

$$c_2 = \frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}c_1 = \beta\frac{w}{p_2}$$

$$c_3 = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{p_1}{p_3}c_1 = \gamma\frac{w}{p_3}$$

(6) En réarrangeant les demandes on obtient les relations suivantes :

$$c_1 = \alpha\frac{w}{p_1} \Rightarrow \frac{p_1c_1}{w} = \alpha$$

$$c_2 = \beta\frac{w}{p_2} \Rightarrow \frac{p_2c_2}{w} = \beta$$

$$c_3 = \gamma\frac{w}{p_3} \Rightarrow \frac{p_3c_3}{w} = \gamma$$

Les paramètres α, β et γ correspondent donc aux coefficients budgétaires de l'agent considéré. Ce coefficient est indépendant des prix et des revenus - propriété fondamentale de la Cobb-Douglas.

2.2 Exercice II : Offre concurrentielle

(1) Le programme de maximisation du profit :

$$\left\{\begin{array}{c} \max\ \Pi = p.Q - wL - rK \\ \textit{sous la contrainte} : \\ Q \geq K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}} \end{array}\right.$$

(2) Les conditions marginales vérifiées par les choix optimaux sur L et K

Les choix sur les facteurs maximisent le profit dès lors qu'ils égalisent la productivité marginale au prix relatif de ceux-ci :

$$\left\{\begin{array}{l} Pm_L = \frac{w}{p} \\ Pm_K = \frac{r}{p} \end{array}\right.$$

Les productivités marginales sont égales ici à :

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{4}K^{1/2}L^{-3/4} = \frac{1}{4}\frac{Q}{L}$$

$$Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{2}K^{-1/2}L^{1/4} = \frac{1}{2}\frac{Q}{K}$$

et donc les demandes conditionnelles des facteurs sont :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\frac{Q}{L} = \frac{w}{p} \\ \frac{1}{2}\frac{Q}{K} = \frac{r}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L^d = \frac{1}{4}\frac{PQ}{w} \\ K^d = \frac{1}{2}\frac{PQ}{r} \end{cases}$$

(3) La contrainte de production : $Q = K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$, combinée aux résultats précédents donne l'offre de production Q^s :

$$Q = \left(\frac{1}{2}\frac{PQ}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\frac{PQ}{w}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow Q^s = \frac{P^3}{16r^2w}$$

Pour chaque niveau de production, les choix sur les facteurs du production sont efficaces s'ils minimisent la dépense. Avec la fonction de production sélectionnée, ceci est vérifiée dès lors que le coût réel de la substitution du capital au travail, $Tmst_{K\to L}$, est égal à son gain relatif, w/r.

(4) Les demandes des facteurs (en fonction des seuls prix) sont données par l'offre concurrentielle Q^s et les demandes conditionnelles :

$$\begin{cases} Q^s = \frac{P^3}{16r^2w} \\ L^d = \frac{1}{4}\frac{PQ}{w} \\ K^d = \frac{1}{2}\frac{PQ}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L^d = \frac{P^4}{64r^2w^2} \\ K^d = \frac{P^4}{32r^3w} \end{cases}$$

2.3 Exercice III : Fonction de coût total

Une entreprise combine le travail (L) et le capital (K) dont les quantités sont respectivement notées L et K, pour produire un bien de consommation en utilisant une technique de production résumée par la fonction de production :

$$Q = K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} \tag{5}$$

Le prix du travail est notée w, celui du capital r.

(1) Le programme de minimisation des coûts :

$$\begin{cases} \min_{L,K} \ wL + rK \\ \textit{sous la contrainte} : \\ K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} \geq Q \end{cases}$$

(2) Les conditions vérifiés par les choix optimaux minimisant les coûts.

Les choix optimaux du production (L, K) sont ceux où à la marge le coût de la substitution du capital en travail $Tmst_{K\to L}$ est égal à son gain, l'économie réalisé mesurée par le rapport w/r. Par conséquent, pour chaque niveau de production Q, les choix optimaux vérifient :

$$\begin{cases} Tmst_{K\to L} = \frac{w}{r} \\ K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} \geq Q \end{cases}$$

(3) La fonction de coût total de l'entreprise.

Le Tmst est égal au rapport au rapport des productivités marginales :

$$Tmst_{K\to L} = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{\frac{\partial}{\partial L}Q}{\frac{\partial}{\partial K}Q} = \frac{\frac{2}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{2}{3}\frac{Q}{L}}{\frac{1}{3}\frac{Q}{K}} = 2\frac{K}{L}$$

et donc la condition marginale nous donne la relation entre les deux facteurs :

$$2\frac{K}{L} = \frac{w}{r} \Rightarrow K = \frac{1}{2}\frac{wL}{r}$$

La substitution de cette relation dans la fonction de production donne la demande conditionnelle de travail L^d :

$$Q = \left(\frac{1}{2}\frac{wL}{r}\right)^{\frac{1}{3}}(L)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow Q = L\left(\frac{w}{2r}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow L^d = \left(\frac{2r}{w}\right)^{\frac{1}{3}}Q$$

La demande de capital K^d est obtenu en combinant ce dernier résultat avec la relation donnant le capital en fonction de L :

$$\left.\begin{array}{c} L = \left(\frac{2r}{w}\right)^{\frac{1}{3}} Q \\ K = \frac{1}{2}\frac{wL}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow K^d = \left(\frac{w}{2r}\right)^{\frac{2}{3}} Q$$

La fonction de coût est la dépense minimale du producteur pour chaque niveau de production Q, dépense minimale définie par les choix optimaux que l'on vient de déterminer :

$$\begin{aligned} C(Q; w, r) &= wL^d + rK^d \\ &= w\left[\left(\frac{2r}{w}\right)^{\frac{1}{3}} Q\right] + r\left[\left(\frac{w}{2r}\right)^{\frac{2}{3}} Q\right] \\ &= Qw^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right] \end{aligned}$$

On remarque que cette fonction est linéaire par rapport à Q, et donc que le coût marginal (Cm) et le coût moyen (CM) sont ici constants et égaux :

$$\begin{aligned} CM &= \frac{C}{Q} = w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right] \\ Cm &= \frac{\partial C}{\partial Q} = w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right] \end{aligned}$$

La constance et l'égalité de ces deux variables est la conséquence de la constance des rendements d'échelle de la fonction de production :

$$\forall \lambda > 0 : (\lambda K)^{\frac{1}{3}} (\lambda L)^{\frac{2}{3}} = \lambda \times K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}} = \lambda Q$$

(4) Quelle est la fonction d'offre du producteur ?

Avec la fonction de coût linéaire que l'on vient de calculer, le profit de l'entrepreneur :

$$\begin{aligned} \Pi &= pQ - C(Q; w, r) \\ &= \left(p - w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right]\right) \times Q \end{aligned}$$

est également linéaire par rapport à Q : par conséquent, si $p > w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right]$, plus la production sera importante, plus le profit de l'entrepreneur sera grand ; si $p = w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right]$, le profit de l'entrepreneur est toujours nul et l'offre est n'importe quelle quantité (le producteur est indifférent) ; si $p < w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right]$, plus l'on produit, plus le profit est négatif, i.e. plus la perte du producteur est grande - la quantité optimale pour le producteur est donc 0. L'offre est donc :

$$Q^s = \begin{cases} +\infty & si \quad p > w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right] \\ [0, +\infty) & si \quad p = w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right] \\ 0 & si \quad p < w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right] \end{cases}$$

L'offre est donc partiellement élastique au prix lorsque celui-ci est $w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right]$.

Remarque 2 *La méthode usuelle pour déterminer l'offre est d"annuler la dérivée du profit :*

$$\frac{\partial}{\partial Q}\Pi = p - w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right]$$

Comme les rendements sont constants, la solution de cette procédure ne détermine pas une quantité mais le prix auquel l'offre est parfaitement élastique :

$$\frac{\partial}{\partial Q}\Pi = 0 \Rightarrow p = w^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left[2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right]$$

Cette solution doit ensuite être interprétée comme on l'a fait plus haut.

2.4 Exercice IV : Equilibre général dans une économie d'échanges, 1

On considère une économie d'échanges comprenant deux biens 1 et 2, deux agents A et B dont les préférences :

$$U_A = (c_1^B)^{\frac{3}{4}}(c_2^B)^{\frac{1}{4}} \tag{6}$$

$$U_B = (c_1^A)^{\frac{3}{4}}(c_2^A)^{\frac{1}{4}} \tag{7}$$

et les dotations des deux agents sont :

	bien 1	bien 2
agent A	100	150
agent B	200	300

(1) Déterminer les demandes des deux agents.

Les contraintes budgétaires des deux agents sont déterminés par leurs ressources et leurs emplois ; dans l'économie, les seules ressources sont les dotations des agents, les seuls emplois leurs consommations. Par conséquent, si l'on note p_1 et p_2 les prix des deux biens, la contrainte budgétaire de chaque agent s'écrit :

$$\textit{agent } A : p_1 c_1^A + p_2 c_2^A \leq 100 p_1 + 150 p_2$$

$$\textit{agent } B : p_1 c_1^B + p_2 c_2^B \leq 200 p_1 + 300 p_2$$

Si l'on note W^i la richesse de l'agent i, i étant soit A soit B, le programme de chaque agent est :

$$\begin{cases} \max_{c_1^i, c_2^i} \ (c_1^i)^{\frac{3}{4}}(c_2^i)^{\frac{1}{4}} \\ \textit{sous les contraintes} : \\ p_1 c_1^i + p_2 c_2^i \leq W^i \\ c_1^i \geq 0, \ c_2^i \geq 0 \end{cases}$$

En supposant que les solutions de ce programme sont intérieurs, i.e. que l'agent considéré consomme des quantités strictement positives de chaque bien, alors les solutions de ce programme sont donnés par la condition marginale (2 biens $\Rightarrow$ 1 condition marginale, N biens $\Rightarrow$ $N-1$ conditions marginales) :

$$Tms_{2\to 1} = \frac{p_1}{p_2}$$

et par la contrainte budgétaire saturée :

$$p_1 c_1^i + p_2 c_2^i = W^i$$

La condition marginale nous donne comment les deux biens doivent être combinés :

$$Tms_{2\to 1} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial c_1}}{\frac{\partial U_i}{\partial c_2}} = \frac{\frac{3}{4}(c_1^i)^{-\frac{1}{4}}(c_2^i)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}(c_1^i)^{\frac{3}{4}}(c_2^i)^{-\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}\frac{U_i}{c_1^i}}{\frac{1}{4}\frac{U_i}{c_2^i}} = 3\frac{c_2^i}{c_1^i}$$

$$Tms_{2\to 1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow 3\frac{c_2^i}{c_1^i} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow c_2^i = \frac{p_1 c_1^i}{3 p_2}$$

L'injection de cette relation dans la contrainte budgétaire permet d'obtenir la demande du bien 2 :

$$p_1 c_1^i + p_2 \left(\frac{p_1 c_1^i}{3 p_2}\right) = W^i \Rightarrow c_1^i = \frac{3}{4}\frac{W^i}{p_1}$$

La demande du bien 2 est obtenue en combinant ce résultat avec celui donnant c_2^i en fonction de c_1^i :

$$\begin{cases} c_2^i = \frac{p_1 c_1^i}{3 p_2} \\ c_1^i = \frac{3}{4}\frac{W^i}{p_1} \end{cases} \Rightarrow c_2^i = \frac{1}{4}\frac{W^i}{p_2}$$

Les demandes des deux agents A et B ainsi que la demande globale sont donc :

$$\begin{array}{lll} & \textit{bien } 1 & \textit{bien } 2 \\ \textit{agent } A & c_1^A = \frac{3}{4}\frac{100p_1+150p_2}{p_1} & c_2^A = \frac{1}{4}\frac{100p_1+150p_2}{p2} \\ \textit{agent } B & c_1^A = \frac{3}{4}\frac{200p_1+300p_2}{p_1} & c_2^B = \frac{1}{4}\frac{200p_1+300p_2}{p2} \\ \textit{total} & c_1 = \frac{3}{4}\frac{300p_1+450p_2}{p_1} & c_2 = \frac{1}{4}\frac{300p_1+450p_2}{p2} \end{array}$$

(2) Déterminer les prix d'équilibre.

Les prix d'équilibre sont déterminés par les conditions d'égalité de l'offre et de la demande sur chaque marché ; en raison de la loi de Walras, lorsque l'on a deux marchés, il suffit d'avoir l'équilibre sur un marché pour l'avoir sur l'autre ; en raison de la neutralité des variables nominales (absence d'illusion nominale des agents, homogénéité de degré 0 des demandes aux prix), on ne peut que déterminer qu'un prix relatif d'équilibre entre les deux biens. On peut donc sans perte de généralité normaliser le prix de l'un des deux biens, i.e. prendre un bien comme numéraire (unité de compte). On choisit ici le bien 1 :

$$p_1 = 1$$

La condition d'équilibre sur le marché de ce bien 1 s'écrit donc alors :

$$c_1^A + c_1^B = c_1 = \frac{3}{4}\left[300 + 450p_2\right] = 300$$

puisque l'offre se réduit à celles des dotations, égales à 300 dans l'économie. Le prix d'équilibre est donc :

$$\frac{3}{4}\left(300 + 450p_2\right) = 300 \Rightarrow p_2 = \frac{2}{9}$$

(3) Calculer les consommations à l'équilibre.

Les consommations d'équilibre sont obtenus en évaluant les fonctions de demandes aux prix d'équilibre :

$$\begin{array}{lll} & \textit{bien } 1 & \textit{bien } 2 \\ \textit{agent } A & c_1^A = \frac{3}{4}\left(100 + 150\frac{2}{9}\right) = 100 & c_2^A = \frac{1}{4}\frac{100+\left(150\times\frac{2}{9}\right)}{\frac{2}{9}} = 150.0 \\ \textit{agent } B & c_1^A = \frac{3}{4}\left(200 + \left(300\times\frac{2}{9}\right)\right) = 200 & c_2^B = \frac{1}{4}\frac{200+300\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{4}\frac{200+300\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}} = 300 \\ \textit{total} & c_1 = \frac{3}{4}\left(300 + \left(450\times\frac{2}{9}\right)\right) = 300 & c_2 = \frac{1}{4}\frac{300+\left(450\frac{2}{9}\right)}{\frac{2}{9}} = 450 \end{array}$$

On remarque que cet équilibre se traduit par une absence d'échanges. Les agents consomment les quantités qu'ils possèdent initialement. Ceci est la conséquence du fait qu'ils ont à la fois les mêmes préférences et que les dotations de l'agent B sont proportionnelles à celles de A : comme leurs Tms sont homogènes de degré 0, cette proportionnalité implique que les agents ont les mêmes dispositions marginales en autarcie :

$$Tms_{2\to 1}^A = 3\frac{150}{100} = \frac{9}{2} = 3\frac{300}{200} = Tms_{2\to 1}^B$$

Au point d'autarcie, les agents valorisent donc identiquement les biens et il n'existe donc aucun échange mutuellement avantageux.

(4) Partant de cet équilibre, peut-on simultanément améliorer la situation des deux agents ?

A l'équilibre, les agents ont les mêmes dispositions marginales à payer et donc ne peuvent réaliser de nouveaux échanges mutuellement avantageux.

2.5 Exercice V. Equilibre général en économie d'échanges, 2

Pour la méthode voir l'exercice précédent.

Le Tms des agents :

$$Tms_{2\to 1}^i = 2\frac{c_2^i}{c_1^i},\ i = A, B$$

Les demandes des agents :

$$c_1^i = \frac{2}{3}\frac{W^i}{p}, \ c_2^i = \frac{1}{3}W^i$$

où W^i est la richesse de chaque agent i.

$$W^A = 150p, \ W^B = 50p + 100$$

Après avoir posé la condition d'équilibre sur le marché du bien 1, on trouve le prix d'équilibre p :

$$\frac{2}{3}\frac{200p + 100}{p} = 200 \Rightarrow p = 1$$

Ce prix d'équilibre permet d'évaluer les consommations des deux agents à l'équilibre :

$$c_1^A = \frac{2}{3}\frac{150 \times 1}{1} = 100, \ c_2^A = \frac{1}{3}150 \times 1 = 50$$

$$c_1^i = \frac{2}{3}\frac{50 \times 1 + 100}{1} = 100, \ c_2^i = \frac{1}{3}(50 \times 1 + 100) = 50$$

Chaque allocation Pareto-optimale épuise les échanges mutuellement avantageux, i.e. si l'on fixe l'utilité de l'agent 2, il est impossible d'augmenter celle de l'agent 1. Par conséquent, pour un niveau d'utilité de B, une allocation Pareto-optimale maximise l'utilité de l'agent A sous les contraintes de ressources ; le programme de l'allocation Pareto-optimale donnant à l'agent B le niveau d'utilité $\underline{U}$ est donc :

$$P(\underline{U}) : \left\{ \begin{array}{c} \max_{c_1^A, c_2^A, c_1^B, c_2^B} \ U_A \\ \textit{sous les contraintes} \ : \\ U_B(c_1^B, c_2^B) \geq \underline{U} \\ c_1^A + c_1^B \leq 200 \\ c_2^A + c_2^B \leq 100 \end{array} \right.$$

En faisant parcourir à $\underline{U}$ l'ensemble des valeurs possibles, on détermine l'ensemble des allocations Pareto-optimales. Les conditions que ces solutions vérifient sont les conditions de ressources (les quantités distribuées doivent être inférieures ou égales aux quantités disponibles) et les conditions marginales d'égalisation des Tms (épuisement des échanges mutuellement avantageux) :

$$\left\{ \begin{array}{c} Tms_{2\to1}^A = Tms_{2\to1}^B \\ c_1^A + c_1^B = 200 \\ c_2^A + c_2^B = 100 \end{array} \right.$$

Les conditions sur les ressources permettent d'exprimer les consommations de l'agent B en fonction de celles de l'agent A et donc on obtient :

$$\begin{aligned} Tms_{2\to1}^A &= Tms_{2\to1}^B \Rightarrow 2\frac{c_2^A}{c_1^A} = 2\frac{c_2^B}{c_1^B} \Rightarrow 2\frac{c_2^A}{c_1^A} = 2\frac{100 - c_2^A}{200 - c_1^A} \\ &\Rightarrow \frac{c_2^A}{c_1^A} = \frac{100 - c_2^A}{200 - c_1^A} \end{aligned}$$

En réarrangeant cette dernière relation on obtient c_2^A en fonction de c_1^A :

$$c_2^A = \frac{1}{2}c_1^A$$

Ceci est l'équation de la courbe des contrats dans la boîte d'Edgeworth.

2.6 Exercice V. Equilibre général en économie d'échanges comprenant trois biens

Pour déterminer l'équilibre général, on détermine successivement les demandes des agents puis on confronte les demandes et les offres pour dégager les prix d'équilibre.

1ère partie : les demandes

Pour déterminer les fonctions de demande, on calcule tout d'abord les Tms des troius agents. Il existe trois biens, donc deux Tms doivent être calculés (par rapport au numéraire). Les Tms de l'agent A sont les suivants :

$$Tms^a_{M\to 1} = \frac{\frac{\partial}{\partial c_1}U_a}{\frac{\partial}{\partial M}U_a} = \frac{\frac{1}{2}\left(c_1^a\right)^{-\frac{1}{2}}\left(c_2^a\right)\left(M^a\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(c_1^a\right)^{\frac{1}{2}}\left(c_2^a\right)\left(M^a\right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{M^a}{c_1^a}$$

$$Tms^a_{M\to 2} = \frac{\frac{\partial}{\partial c_2}U_a}{\frac{\partial}{\partial M}U_a} = \frac{\left(c_1^a\right)^{\frac{1}{2}}\left(M^a\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(c_1^a\right)^{\frac{1}{2}}\left(c_2^a\right)\left(M^a\right)^{-\frac{1}{2}}} = 2\frac{M^a}{c_2^a}$$

Ceux de l'agent B sont :

$$Tms^b_{M\to 1} = \frac{\frac{\partial}{\partial c_1}U_b}{\frac{\partial}{\partial M}U_b} = \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{c_1^b}}{\frac{1}{4}\frac{1}{M^b}} = \frac{M^b}{c_1^b}$$

$$Tms^b_{M\to 2} = \frac{\frac{\partial}{\partial c_2}U_b}{\frac{\partial}{\partial M}U_b} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{c_2^b}}{\frac{1}{4}\frac{1}{M^b}} = 2\frac{M^b}{c_2^b}$$

Enfin, on obtient ceux de l'agent c :

$$Tms^c_{M\to 1} = \frac{\frac{\partial}{\partial c_1}U_c}{\frac{\partial}{\partial M}U_c} = \frac{\frac{1}{8}\left(c_1^c\right)^{-\frac{7}{8}}\left(c_2^c\right)^{\frac{1}{4}}\left(M^c\right)^{\frac{1}{8}}}{\frac{1}{8}\left(c_1^c\right)^{\frac{1}{8}}\left(c_2^c\right)^{\frac{1}{4}}\left(M^c\right)^{-\frac{7}{8}}} = \frac{M^c}{c_1^c}$$

$$Tms^c_{M\to 2} = \frac{\frac{\partial}{\partial c_2}U_c}{\frac{\partial}{\partial M}U_c} = \frac{\frac{1}{4}\left(c_1^c\right)^{\frac{1}{8}}\left(c_2^c\right)^{-\frac{3}{4}}\left(M^c\right)^{\frac{1}{8}}}{\frac{1}{8}\left(c_1^c\right)^{\frac{1}{8}}\left(c_2^c\right)^{\frac{1}{4}}\left(M^c\right)^{-\frac{7}{8}}} = 2\frac{M^c}{c_2^c}$$

On constate que les Tms des trois agents sont identiques : ceci traduit le fait que leurs préférences sont identiques. Par conséquent, leurs **fonctions** de demande seront les mêmes. Aussi, on va se contenter de raisonner sur un des trois agents, l'agent A. Le programme de celui-ci est :

$$\left\{\begin{array}{l} \max_{c_1^a, c_2^a, M^a}\ U_a = \left(c_1^a\right)^{\frac{1}{2}}\left(c_2^a\right)\left(M^a\right)^{\frac{1}{2}} \\ \textit{sous les contraintes} : \\ p_1 c_1^a + p_2 c_2^a + M^a = W^a \\ c_1^a \geq 0,\ c_2^a \geq 0 \end{array}\right.$$

où W^a est la richesse de l'agent A :

$$W^a = p_1\omega_1^a + p_2\omega_2^a + M^a$$

En supposant que A consomme des quantités strictement positives de chaque bien, les fonctions de demande, solutions de ce programme, sont les solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} Tms^a_{M\to 1} = p_1 \\ Tms^a_{M\to 2} = p_2 \\ p_1 c_1^a + p_2 c_2^a + M^a = W^a \end{array}\right.$$

Les condions sur les Tms permettent d'exprimer les consommations optimales des biens 1 et 2 en fonction de l'encaisse optimale de monnaie :

$$Tms^a_{M\to 1} = p_1 \Rightarrow \frac{M^a}{c_1^a} = p_1 \Rightarrow c_1^a = \frac{M^a}{p_1}$$

$$Tms^a_{M\to 2} = p_2 \Rightarrow 2\frac{M^a}{c_2^a} = p_2 \Rightarrow c_2^a = 2\frac{M^a}{p_2}$$

En remplaçant ces expressions dans la contrainte budgétaire :

$$p_1\left(\frac{M^a}{p_1}\right) + p_2\left(2\frac{M^a}{p_2}\right) + M = W^a$$

on détermine la demande de monnaie de A :

$$M^a + 2M^a + M^a = W^a \Rightarrow M^a = \frac{1}{4}W^a$$

Les autres demandes sont obtenues en réutilisant les relations entre les choix optimaux (déduites des conditions Tms = prix) :

$$c_1^a = \frac{M^a}{p_1} \Rightarrow c_1^a = \frac{1}{4}\frac{W^a}{p_1}$$

$$c_2^a = 2\frac{M^a}{p_2} \Rightarrow c_2^a = \frac{1}{2}\frac{W^a}{p_2}$$

Les demandes des autres agents ont la même forme puisque les agents ont les mêmes préférences (et les mêmes Tms). Par conséquent :

$$c_1^b = \frac{1}{4}\frac{W^b}{p_1},\ c_2^b = \frac{1}{2}\frac{W^b}{p_2},\ M^b = \frac{1}{4}W^b$$

$$c_1^c = \frac{1}{4}\frac{W^c}{p_1},\ c_2^c = \frac{1}{2}\frac{W^c}{p_2},\ M^c = \frac{1}{4}W^c$$

Comme les valeurs numériques des dotations nous donnent les richesses suivantes :

$$\begin{aligned} W^a &= 200p_1 + 50p_2 + 200 \\ W^b &= 400p_1 + 150p_2 \\ W^c &= 100p_2 + 100 \end{aligned}$$

$$c_1^a = \frac{1}{4}\frac{200p_1 + 50p_2 + 200}{p_1},\ c_2^a = \frac{1}{2}\frac{200p_1 + 50p_2 + 200}{p_2},\ M^a = \frac{200p_1 + 50p_2 + 200}{4}$$

$$c_1^b = \frac{1}{4}\frac{400p_1 + 150p_2}{p_1},\ c_2^b = \frac{1}{2}\frac{400p_1 + 150p_2}{p_2},\ M^b = \frac{400p_1 + 150p_2}{4}$$

$$c_1^c = \frac{1}{4}\frac{100p_2 + 100}{p_1},\ c_2^c = \frac{1}{2}\frac{100p_2 + 100}{p_2},\ M^c = \frac{100p_2 + 100}{4}$$

Remarque 3 *Une propriété utile de ces fonctions de demande est qu'elles sont proportionnelles à la richesse des agents :*

$$\frac{c_1^a}{c_1^c} = \frac{W^a}{W^c},\ \frac{c_1^b}{c_1^c} = \frac{W^b}{W^c}$$

$$\frac{c_2^a}{c_2^c} = \frac{W^a}{W^c},\ \frac{c_2^b}{c_2^c} = \frac{W^b}{W^c}$$

$$\frac{M^a}{M^c} = \frac{W^a}{W^c},\ \frac{M^b}{M^c} = \frac{W^b}{W^c}$$

Par conséquent, si, par exemple, l'agent i possède 50% de la richesse de l'économie, il consommera 50% de la quantité totale de bien 1*, 50% de la quantité totale de bien* 2*, et détiendra 50% des encaisses monétaires de l'économie. Plus généralement, si l'on note* W *la richesse totale de l'économie (*$W = W^a + W^b + W^c$*),* Ω_j *la dotation globale en bien* j*,* $\overline{M}$ *la quantité totale de monnaie :*

$$c_1^a = \frac{W^a}{W}.\Omega_1,\ c_1^b = \frac{W^b}{W}.\Omega_1,\ c_1^c = \frac{W^c}{W}.\Omega_1$$

$$c_2^a = \frac{W^a}{W}.\Omega_2,\ c_2^b = \frac{W^b}{W}.\Omega_2,\ c_2^c = \frac{W^c}{W}.\Omega_2$$
$$M^a = \frac{W^a}{W}.\overline{M},\ M^b = \frac{W^b}{W}.\overline{M},\ M^c = \frac{W^c}{W}.\overline{M}$$

2ème partie : les prix d'équilibres.

Le fonctionnement des marchés est supposé conduire à l'équilibre des offres globales et des demandes globales sur les différents marchés. L'offre globale de chaque est dans l'économie d'échanges considérée la dotation globale. Les demandes globales sont obtenues en sommant les demandes individuelles des différents biens :

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1^a + c_1^b + c_1^c \\ &= \frac{1}{4}\frac{W^a}{p_1} + \frac{1}{4}\frac{W^b}{p_1} + \frac{1}{4}\frac{W^c}{p_1} \\ &= \frac{1}{4}\frac{W^a + W^b + W^c}{p_1} \\ &= \frac{1}{4}\frac{600p_1 + 300p_2 + 300}{p_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= c_2^a + c_2^b + c_2^c \\ &= \frac{1}{2}\frac{W^a}{p_2} + \frac{1}{2}\frac{W^b}{p_2} + \frac{1}{2}\frac{W^c}{p_2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{W^a + W^b + W^c}{p_2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{600p_1 + 300p_2 + 300}{p_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= M^a + M^b + M^c \\ &= \frac{1}{4}W^a + \frac{1}{4}W^b + \frac{1}{4}W^c \\ &= \frac{1}{4}\left[W^a + W^b + W^c\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[600p_1 + 300p_2 + 300\right] \end{aligned}$$

La loi de Walras permet de se contenter de deux des trois conditions d'équilibre (par exemple celles des biens 1 et 2) pour déterminer les prix d'équilibre (p_1 et p_2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \Omega_1 \\ c_2 = \Omega_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}\frac{600p_1+300p_2+300}{p_1} = 600 \\ \frac{1}{2}\frac{600p_1+300p_2+300}{p_2} = 300 \end{array} \right.$$

En simplifiant les deux termes de gauche pour supprimer les fractions, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 600p_1 + 300p_2 + 300 = 2400p_1 \\ 600p_1 + 300p_2 + 300 = 600p_2 \end{array} \right.$$

Comme les termes de gauche sont identiques, on a donc que les deux termes de droite sont égaux :

$$2400p_1 = 600p_2 \Rightarrow p_2 = 4p_1$$

En substituant cette expression dans la première ligne on obtient :

$$600p_1 + 300\,(4p_1) + 300 = 2400p_1$$

ou encore :

$$2p_1 + 4p_1 + 1 = 8p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow p_2 = 2$$

Lorsque l'on a déterminé les deux prix (= prix relatifs) d'équilibre, on détermine les consommations des trois à l'équilibre. En général, on utilise les demandes des trois agents que l'on évalue pour les prix d'équilibre trouvés. Par exemple pour A, on calcule alors :

$$W^a = 200\left(\frac{1}{2}\right) + 50\,(2) + 200 = 400$$

et donc les consommations à l'équilibre sont :

$$\begin{aligned} c_1^a &= \frac{1}{4}\frac{W^a}{p_1} = 200 \\ c_2^a &= \frac{1}{2}\frac{W^a}{p_2} = 100 \\ M^a &= \frac{1}{4}W^a = 100 \end{aligned}$$

Lorsque les demandes sont identiques et linéaires, on peut utiliser (cf Remarque 1 plus haut) le fait que les demandes sont proportionnelles à la richesse. Par conséquent, pour obtenir les consommations d'équilibre, on calcule la part de l'agent dans la richesse de l'économie :

$$\begin{aligned} W^a &= 200p_1 + 50p_2 + 200 \\ W^b &= 400p_1 + 150p_2 \\ W^c &= 100p_2 + 100 \end{aligned}$$

$$W^a = 400,\ W^b = 500,\ W^b = 300$$

$$\begin{aligned} \frac{W^a}{W^a + W^b + W^c} &= \frac{1}{4} \\ \frac{W^b}{W^a + W^b + W^c} &= \frac{5}{12} \\ \frac{W^c}{W^a + W^b + W^c} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Les consommations sont obtenus en appliquant directement ces parts aux dotations globales. Aussi, par exemple, comme A détient le 1/3 de la richesse, il consommera le 1/3 de la dotation du bien 1, 1/3 de celle du bien 2, et détient le 1/3 des encaisses monétaires. Par conséquent, les consommations à l'équilibre seront :

	bien 1	bien 2	monnaie
agent A	200	100	100
agent B	250	125	125
agent C	150	75	75

2.7 Exercice VI : Equilibre général avec production

On considère une économie de production comportant deux biens de consommation 1 et 2 produit à l'aide du travail par deux entreprises dont les techniques de production sont :

$$Q_1 = \sqrt{L_1},\ Q_2 = \sqrt{2L_2}$$

Le travail est offert par deux ménages A et B dont les fonctions d'utilité différentes sont :

$$\begin{aligned} U_A &= \left(c_1^A\right)^{\frac{2}{3}}\left(c_2^A\right)^{\frac{1}{3}} \\ U_B &= \frac{1}{6}\ln\left(c_1^B\right) + \frac{1}{12}\ln\left(c_2^B\right) \end{aligned}$$

Chaque ménage dispose de 100 unités de travail et possède la moitié des profits. On prend comme numéraire le prix du travail et on note p_1 et p_2 les prix des deux biens. Déterminez les prix d'équilibre.

Pour déterminer l'équilibre on détermine successivement les demandes des ménages, les offres et les demandes des deux entreprises, puis on détermine les prix d'équilibre.

I. Les demandes des ménages :

On peut tout d'abord facilement vérifié que les deux agents ont les mêmes préférences puisque si l'on transforme la fonction d'utilité de A par la fonction croissante $\frac{1}{4}\ln$ on obtient la fonction d'utilité V_A qui représente toujours les préférences de l'agent, avec :

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{1}{4}\ln(U_A) = \frac{1}{4}\ln\left(\left(c_1^A\right)^{\frac{2}{3}}\left(c_2^A\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\ln(c_1^A) + \frac{1}{3}\ln(c_2^A)\right) \\ &= \frac{1}{6}\ln(c_1^A) + \frac{1}{12}\ln(c_2^A) \end{aligned}$$

Comme chaque agent offre inélastiquement 100 unités de travail, dont le salaire est supposé égal à 1, et reçoit la moitié des profits des deux entreprises (profits que l'on note Π_1 et Π_2) alors leurs contraintes budgétaires s'écrivent :

$$p_1 c_1^i + p_2 c_2^i \leq 100 + \frac{1}{2}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_2,\ i = A, B$$

où i est soit l'indice de l'agent A, soit l'indice de l'agent B. En supposant que les demandes sont intérieures, alors les conditions qu'elles vérifient sont :

$$\begin{cases} Tms_{2\to 1}^i = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 c_1^i + p_2 c_2^i = 100 + \frac{1}{2}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_2 \end{cases}$$

Or, le Tms est :

$$Tms_{2\to 1}^i = \frac{\frac{\partial}{\partial c_1}U_i}{\frac{\partial}{\partial c_2}U_i} = 2\frac{c_2^i}{c_1^i}$$

et donc on a :

$$Tms_{2\to 1}^i = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow 2\frac{c_2^i}{c_1^i} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow c_2^i = \frac{p_1 c_1^i}{2p_2}$$

La réinjection de la dernière relation dans la contrainte budgétaire donne la demande du bien 1 pour l'agent i considéré :

$$p_1 c_1^i + p_2\frac{p_1 c_1^i}{2p_2} = 100 + \frac{1}{2}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_2$$

et donc après simplifictations, réarrangements, on obtient :

$$c_1^i = \frac{2}{3}\frac{100 + \frac{1}{2}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_2}{p_1}$$

Cette demande combinée à la relation entre c_2^i et c_1^i donne à son tour la demande de bien 2 de l'agent i considéré :

$$c_2^i = \frac{1}{3}\frac{100 + \frac{1}{2}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_2}{p_2}$$

Les demandes et les offres des entreprises.

Comme les fonctions de production sont

$$Q_1 = \sqrt{L_1},\ Q_2 = \sqrt{2L_2}$$

et que le salaire est normalisé à 1, les profits des deux entreprises peuvent être écrit de la manièree suivante :

$$entreprise\ 1 : \Pi_1 = p_1\sqrt{L_1} - L_1$$

$$\textit{entreprise } 2 : \Pi_2 = p_2\sqrt{2L_2} - L_2$$

La maximisation du profit revient ici à rechercher les quantités L_1 et L_2 annulant les dérivées des profits :

$$\frac{\partial}{\partial L_1}\Pi_1 = p_1\frac{1}{2\sqrt{L_1}} - 1$$

$$\frac{\partial}{\partial L_2}\Pi_2 = p_2\frac{1}{\sqrt{2L_2}} - 1$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial}{\partial L_1}\Pi_1 = 0 \Rightarrow p_1\frac{1}{2\sqrt{L_1}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{p_1}{2} = \sqrt{L_1} \Rightarrow \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 = L_1$$

$$\frac{\partial}{\partial L_2}\Pi_2 = 0 \Rightarrow p_2\frac{1}{\sqrt{2L_2}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{p_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{L_2} \Rightarrow \frac{(p_2)^2}{2} = L_2$$

Les offres concurrentielles sont obtenues en plongeant ces demandes de travail dans la fonction de production :

$$Q_1 = \sqrt{\left(\frac{p_1}{2}\right)^2} = \frac{p_1}{2}$$

$$Q_2 = \sqrt{2\frac{(p_2)^2}{2}} = p_2$$

Les profits des entreprises en fonction des prix sont donc :

$$\textit{entreprise } 1 : \Pi_1 = p_1\frac{p_1}{2} - \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 = \frac{p_1^2}{4}$$

$$\textit{entreprise } 2 : \Pi_2 = p_2(p_2) - \frac{(p_2)^2}{2} = \frac{p_2^2}{2}$$

On peut alors exprimer les demandes des ménages uniquement en fonction des prix en substituant dans les demandes aux profits Π_1 et Π_2 leurs expressions :

$$\begin{aligned} c_1^i &= \frac{2}{3}\frac{100 + \frac{1}{2}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_2}{p_1} = \frac{2}{3}\frac{100 + \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{2}}{p_1} \\ &= \frac{2}{3}\frac{100 + \frac{p_1^2}{8} + \frac{p_2^2}{4}}{p_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2^i &= \frac{1}{3}\frac{100 + \frac{1}{2}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_2}{p_2} = \frac{1}{3}\frac{100 + \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{2}}{p_2} \\ &= \frac{1}{3}\frac{100 + \frac{p_1^2}{8} + \frac{p_2^2}{4}}{p_2} \end{aligned}$$

Equilibre général.

Il existe trois marchés : les deux marchés de biens et le marché du travail. Par la loi de Walras pour déterminer l'équilibre, il suffit de poser les conditions d'équilibre sur deux marchés, par exemple les deux marchés de biens :

$$\begin{cases} c_1^A + c_1^B = \frac{4}{3}\frac{100+\frac{p_1^2}{8}+\frac{p_2^2}{4}}{p_1} = \frac{p_1}{2} = Q_1 \\ c_2^A + c_2^B = \frac{2}{3}\frac{100+\frac{p_1^2}{8}+\frac{p_2^2}{4}}{p_2} = p_2 = Q_2 \end{cases}$$

En réarrangeant ces équations, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} 800+p_1^2+2p_2^2=3p_1^2 \\ \left(200+\frac{p_1^2}{4}+\frac{p_2^2}{2}\right)=3p_2^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} p_1^2=400+p_2^2 \\ 300+\frac{3p_2^2}{4}=3p_2^2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} p_1^2=400+p_2^2 \\ 300=\frac{9}{4}p_2^2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} p_2=\sqrt{\frac{400}{3}}=11.547 \\ p_1=\sqrt{400+\left(\frac{400}{3}\right)}=23.094 \end{array}\right.$$

: : : Connaissant les prix, on détermine alors les quantités réelles :

$$Q_1=\frac{23.094}{2}=11.547,\ L_1=\left(\frac{23.094}{2}\right)^2=133.33,\ \Pi_1=\frac{(23.094)^2}{4}=133.33$$

$$Q_2=11.547=11.547,\ L_2=\frac{(11.547)^2}{2}=66.667,\ \Pi_2=\frac{(11.547)^2}{2}=66.667$$

et naturellement on trouve :

$$i=A,B:c_1^i=\frac{2}{3}\frac{100+\frac{(23.094)^2}{8}+\frac{(11.547)^2}{4}}{23.094}=5.7735=\frac{Q_1}{2}$$

$$i=A,B:c_2^i=\frac{1}{3}\frac{100+\frac{(23.094)^2}{8}+\frac{(11.547)^2}{4}}{11.547}=5.7735=\frac{Q_2}{2}$$

2.8 Exercice VII : Equilibre général et optimalité de Pareto dans une économie de production

Le travail étant pris comme numéraire, les profits des entreprises s'écrivent :

$$\pi_1=p_1\,(0.5l_1)-l_1,\ \pi_2=p_2\sqrt{l_2}-l_2$$

Les cpo de maximisation de ces profits nous donnent :

$$p_1=2,\ l_2=\left(\frac{p_2}{2}\right)^2\Rightarrow q_2=\frac{p_2}{2},\ \pi_2=\frac{p_2^2}{4}$$

La technique de l'entreprise 1 étant à rendements constants, l'offre de bien (et la demande de travail) est parfaitement élastique à $p_1=2$. Si le prix d'équilibre est 2, le profit de 1 est nul.

La fonction d'utilité de A, U^A, est égale à $3\ln\left(U^B\right)$ et est donc la tranformation de la fonction d'utilité de B par une fonction croissante. Les fonctions d'utilité représentent donc les mêmes préférences : les Tms et les fonctions de demandes de ces agents sont les mêmes. Le profit de 1 étant nul pour tout équilibre concurrentiel, les revenus des agents, somme du revenu salarial et des profits reçus, sont respectivement :

$$R_A=50+\frac{\pi_2}{3}=50+\frac{p_2^2}{12},\ R_B=50+\frac{2}{3}\pi_2=50+\frac{p_2^2}{6}$$

La demande de chaque agent i est la solution du programme et des cpo :

$$\left\{\begin{array}{c} \max_{c_1^i,c_2^i} 2\ln\left(c_1^i\right)+\ln\left(c_2^i\right) \\ s.c: \\ p_1c_1^i+p_2c_2^i=R_i \end{array}\right. \Rightarrow\ Tms_{2\to1}^i=\frac{2c_2^i}{c_1^i}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$\Rightarrow\ p_1c_1^i=2p_2c_2^i$$

$$\textit{après substitution ds la cont. budgétaire}\ \Rightarrow\ c_1^i=\frac{2}{3}\frac{R_i}{p_1},\ c_2^i=\frac{1}{3}\frac{R_i}{p_2}$$

Les demandes sont donc :

$$c_1^A = \frac{2}{3}\frac{50+\frac{p_2^2}{12}}{p_1},\ c_1^B = \frac{2}{3}\frac{50+\frac{p_2^2}{6}}{p_1},\ c_2^A = \frac{1}{3}\frac{50+\frac{p_2^2}{12}}{p_2},\ c_2^B = \frac{1}{3}\frac{50+\frac{p_2^2}{6}}{p_2},$$

Par loi de Walras, les équations d'équilibre des marchés 1 et 2 suffisent pour déterminer les prix d'équilibre p_1 et p_2 :

$$c_2^A + c_2^B = \frac{1}{3}\frac{100+\frac{p_2^2}{4}}{p_2} = \frac{p_2}{2} = q_2 \Rightarrow p_2 = 4\sqrt{5},\ q_2 = 2\sqrt{5},\ l_2 = 20 = \pi_2$$

$$p_1 = 2,\ p_2 = 4\sqrt{5} \Rightarrow q_1 = c_1^A + c_1^B = \frac{2}{3}\frac{100+\frac{p_2^2}{4}}{p_1} = 40,\ l_1 = 80$$

Les demandes globales ne dépendent que du profit global :

$$c_1 = \frac{2}{3}\frac{100+\pi_2}{p_1},\ c_2 = \frac{1}{3}\frac{100+\pi_2}{p_2}$$

Toute redistribution des profits de A vers B, et inversement, ne modifie pas la demande globale. Par conséquent, si $p_1 = 2$ et $p_2 = 4\sqrt{5}$ équilibrent l'offre à la demande globales lorsque l'agent A reçoit le tiers du profit de l'ent. 2, ils les équilibrent également lorsque l'agent A reçoit la totalité des profits. Les prix demeurent inchangés - cette invariance des prix est la conséquence de l'existence d'un agent représentatif dans l'économie (Tms des deux agents identiques et homogène de degré 0).

La frontière de production est obtenu directement des contraintes de ressources portant sur le travail :

$$\left.\begin{array}{c} l_1 + l_2 = 100 \\ q_1 = 0.5 l_1 \\ q_2 = \sqrt{l_2} \end{array}\right\} \Rightarrow 2q_1 + q_2^2 = 100 \Rightarrow q_2 = \sqrt{100-2q_1}$$

$$\Rightarrow TTP_{2\to1} = -\frac{dq_2}{dq_1} = 1/\sqrt{100-2q_1}$$

Le TTP est croissant de q_1 et donc la frontière de production est concave : il faut renoncer à de plus en plus de bien 2 pour chaque unité supplémentaire de bien 1 - ceci est la conséquence des rendements d'échelle décroissants (et constant pour l'ent. 1). Le programme des allocations Pareto-optimales, lorsque la frontière de production est connue, est :

$$P(\overline{u}) : \left\{ \begin{array}{c} \max_{c_1^A, c_2^A, c_1^B, c_2^B, q_1, q_2} 2\ln\left(c_1^A\right) + \ln\left(c_2^B\right) \\ s.c : \\ \left(c_1^B\right)^{\frac{2}{3}}\left(c_2^B\right)^{\frac{1}{3}} \geq \overline{u} \\ c_1^A + c_1^B = q_1 \\ c_2^A + c_2^B = q_2 \\ q_2 = \sqrt{100-2q_1} \end{array}\right.$$

où $\overline{u}$ est un paramètre. Ses conditions de premier ordre sont :

$$Tms_{2\to1}^A = Tms_{2\to1}^B = TTP_{2\to1} \Rightarrow 2\frac{c_2^A}{c_1^A} = 2\frac{c_2^B}{c_1^B} = 2\frac{c_2^A + c_2^B}{c_1^A + c_1^B} = 2\frac{q_2}{q_1} = Tms_{2\to1}^{AR}$$

où $Tms_{2\to1}^{AR}$ est le Tms de l'agent représentatif (AR). Les quantités globales sont données par l'égalisation de ce Tms au TTP :

$$\begin{aligned} Tms_{2\to1}^{AR} &= TTP_{2\to1} \Rightarrow 2\frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{q_2} \Rightarrow 2q_2^2 = q_1 \\ &\Rightarrow 2(100-2q_1) = q_1 \Rightarrow q_1 = 20,\ q_2 = \sqrt{60} = 2\sqrt{15} \end{aligned}$$

Les productions globales étant fixées, on peut déterminer la courbe des contrats en égalisant le Tms de l'agent A au Tms de l'agent représentatif :

$$Tms_{2\to1}^A = 2\frac{c_2^A}{c_1^A} = 2\frac{2\sqrt{15}}{20} = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow CC : c_2^A = \sqrt{\frac{3}{20}}c_1^A$$