Microéconomie - licence
Annales corrigées

Philippe Bernard
EURIsCO, Paris IX

Ces Annales ne sont qu'une sélection des exercices et des questions qui ont été posées en contrôle continu, en partiel ou à l'examen de septembre depuis 1998. Certains exercices ou questions ont été éliminées car ils sont désormais hors programme. D'autres exercices ont été également éliminés en raison de leurs similarités avec des exercices déjà corrigés. **N.B. : Certaines erreurs et coquilles peuvent encore être présentes dans les pages qui suivent.**

1 Contrôle continu 1998

1.1 Intitulé

1.1.1 Cours

1. L'aversion (absolue) au risque de Arrow-Pratt (définition, logique économique) (2 points)

1.1.2 Exercice I

(6 points) On considère une économie à deux périodes (t = 0, 1), deux états du monde (s = 1,2), une action dont le prix est $v = 30$ et dont les revenus sont $d = [20, 40]$ et dont le taux d'intérêt est de 25%.

1. On introduit un contrat d'option de vente dont le sous-jascent est l'action, dont le prix d'exercice est égal à 30. Calculez le prix d'équilibre de cet actif. (3 points)
2. On introduit une autre action dont les revenus sont $d' = [60, 10]$ et dont le prix proposé est 15. Ce prix peut-il être un prix d'équilibre ? (1 point)
3. Si le prix proposé n'est pas un prix d'équilibre, construisez un portefeuille d'arbitrage (comprenant les deux actions et l'actif sûr) vous permettant de dégager un profit d'arbitrage immédiat. (2 points)

1.1.3 Exercice II

(8 points) On considère une économie à deux périodes (t = 0, 1), trois états du monde (s = 1,2,3) dont les probabilités sont $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, un unique bien contingent à chaque date-événement, trois actifs financiers a=1,2,3 (deux actions + 1 actif certain) dont la matrice des revenus sont :

$$d = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

L'économie comprend également deux agents A et B possédant les dotations suivantes :

	0	1	2	3
A	0	50	100	70
B	100	100	0	80

Les préférences de l'agent A sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U_A = \left(c_0^A\right) \left(c_1^A\right)^{\frac{1}{4}} \left(c_2^A\right)^{\frac{1}{2}} \left(c_3^A\right)^{\frac{1}{4}}$$

Celles de l'agent B suivent l'axiomatique de l'utilité espérée. La fonction d'utilité élémentaire est :

$$u_B = \ln\left(c\left(0\right)\right) + \ln\left(c\left(1\right)\right)$$

1. Si les agents peuvent acheter et vendre les trois actifs sur des marchés financiers parfaits (en CPP), déterminez les contraintes budgétaires du ménage A aux quatres dates-événements. (1 point)
2. Ce système de marchés financiers est-il complet ? (1 point)
3. Pourquoi existe-t-il un agent représentatif dont la fonction d'utilité est :

$$U = \left(c_0\right)^{\frac{1}{2}} \left(c_1\right)^{\frac{1}{8}} \left(c_2\right)^{\frac{1}{4}} \left(c_3\right)^{\frac{1}{8}}$$

(2 points)

4. En exploitant le résultat de la dernière question, déterminez les prix d'équilibre des trois actifs. (2 points)
5. Quel est le taux d'actualisation de l'économie ? (1 point)

1.2 Eléments de correction

(I) On considère une économie à deux périodes ($t = 0, 1$), deux états du monde ($s = 1, 2$), une action dont le prix est $v = 30$ et dont les revenus sont $d = [20, 40]$ et dont le taux d'intérêt est de 25%.

Le sous-jascent de l'option de vente étant l'action et son prix d'exercice étant de 30, ses revenus sont :

$$P(d, 30) = \begin{bmatrix} \max(30 - d(1), 0) \\ \max(30 - d(2), 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour évaluer cette option de vente, on dispose des "prix" de deux actifs : l'action et le taux d'intérêt. Comme il existe seulement deux états du monde, que les (vecteurs de) revenus des deux actifs ne sont pas colinéaires, il existe un seul couple de "prix des états" $\beta(1)$ et $\beta(2)$ donné par les équations de valorisation suivante :

$$\begin{cases} 30 = 20\beta(1) + 40\beta(2) \\ 1 = \frac{5}{4}(\beta(1) + \beta(2)) \end{cases}$$

où 5/4 est le rendement brut (1 + taux d'intérêt). L'unique solution de ce système est : $\beta(1) = 1/10$, $\beta(2) = 7/10$. Tout autre actif (et donc l'option de vente) peut être évalué à l'aide de ce système de prix. La valeur de l'option de vente est donc :

$$\frac{1}{10} \times 10 + \frac{7}{10} \times 0 = 1$$

Tant que le prix de marché est différent de cette valeur, il est possible de réaliser des profits d'arbitrage. Ceux-ci étant incompatibles avec l'équilibre, nécessairement à celui-ci le prix de l'option de vente sera égal à 1.

La seconde action a pour vecteur de revenus $d' = [60, 10]$ et le prix proposé est 15. Pour déterminer si ce prix peut-être un prix d'équilibre, on détermine la valeur de cette seconde action à l'aide des prix des états :

$$\frac{1}{10} \times 60 + \frac{7}{10} \times 10 = 13$$

La valeur étant inférieure au prix, il existe des opportunités d'arbitrage : le prix ne peut être un prix d'équilibre.

(II) 2eme question - Le marché est complet car les vecteurs colonnes de la matrice $d = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants. Ceci se montre notamment en calculant le déterminant de cette matrice :

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = -32 \neq 0 \Rightarrow \textit{non colinéarité}$$

3ème question - L'utilité de l'agent B est :

$$U_B = \ln\left(c_0^B\right) + \frac{1}{4}\ln\left(c_1^B\right) + \frac{1}{2}\ln\left(c_2^B\right) + \frac{1}{4}\ln\left(c_3^B\right)$$

Le calcul des Tms des deux agents montre que leurs formes fonctionnelles sont identiques :

$$Tms^i_{0\to1} = \frac{1}{4}\frac{c_0^i}{c_1^i},\ Tms^i_{0\to2} = \frac{1}{2}\frac{c_0^i}{c_2^i},\ Tms^i_{0\to3} = \frac{1}{4}\frac{c_0^i}{c_3^i}$$

Les fonctions Tms sont identiques et homogènes de degré 0. Par conséquent, si l'équilibre amène l'égalisation des Tms, il existera un agent représentatif dont les préférences définissent les Tms suivants :

$$Tms^{AR}_{0\to1} = \frac{1}{4}\frac{c_0^{AR}}{c_1^{AR}},\ Tms^{AR}_{0\to2} = \frac{1}{2}\frac{c_0^{AR}}{c_2^{AR}},\ Tms^{AR}_{0\to3} = \frac{1}{4}\frac{c_0^{AR}}{c_3^{AR}}$$

On vérifie que la fonction d'utilité :

$$U_{AR} = \left(c_0^{AR}\right)^{\frac{1}{2}}\left(c_1^{AR}\right)^{\frac{1}{8}}\left(c_2^{AR}\right)^{\frac{1}{4}}\left(c_3^{AR}\right)^{\frac{1}{8}}$$

donne bien ces Tms.

Remarque : En fait, on vérifie que les trois fonctions d'utilité caractérisent les mêmes préférences car elles sont des transformations croissantes des deux autres :

$$U_{AR} = \sqrt{U_A} = \sqrt{\exp(U_B)}$$

4ème question : Les marchés de cette économie d'échange étant complets, les prix sont déterminés par les valeurs des Tms de l'agent représentatif. Or ceux-ci sont :

$$\begin{aligned}
Tms^{AR}_{0\to1} &= \frac{1}{4}\frac{c^{AR}_0}{c^{AR}_1} = \frac{1}{4}\frac{\omega^A_0+\omega^B_0}{\omega^A_1+\omega^B_1} = \frac{1}{4}\frac{0+100}{50+100} = \frac{1}{6} \\
Tms^{AR}_{0\to1} &= \frac{1}{2}\frac{c^{AR}_0}{c^{AR}_2} = \frac{1}{2}\frac{\omega^A_0+\omega^B_0}{\omega^A_2+\omega^B_2} = \frac{1}{2}\frac{0+100}{100+0} = \frac{1}{2} \\
Tms^{AR}_{0\to3} &= \frac{1}{4}\frac{c^{AR}_0}{c^{AR}_3} = \frac{1}{4}\frac{\omega^A_0+\omega^B_0}{\omega^A_3+\omega^B_3} = \frac{1}{4}\frac{0+100}{70+80} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

La valeur de ces Tms détemine les prix des actifs ainsi que le taux d'intérêt :

$$\begin{aligned}
q_1 &= 5.Tms^{AR}_{0\to1} + 5.Tms^{AR}_{0\to2} + 1.Tms^{AR}_{0\to3} \\
&= 5\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{6} \\
&= 3.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_2 &= 2\times Tms^{AR}_{0\to1} + 2\times Tms^{AR}_{0\to2} + 2\times Tms^{AR}_{0\to3} \\
&= 2\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{6} \\
&= 1.666
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_3 &= 1\times Tms^{AR}_{0\to1} + 5\times Tms^{AR}_{0\to2} + 5\times Tms^{AR}_{0\to3} \\
&= 1\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{2} + 5\times\frac{1}{6} \\
&= 3.5
\end{aligned}$$

5ème question - Comme l'actif 2 donne un revenu de 2 unités de numéraire dans chaque états du monde pour un prix égal à q_2, le coût pour obtenir un revenu de 1 dans chaque état du monde est naturellement $q_2/2$. Ce coût à l'équilibre des marchés doit être égal à $1/1+r$. Le taux d'intérêt de l'économie est déterminé par la relation d'arbitrage :

$$\frac{1}{1+r} = \frac{q_2}{2}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
r &= \frac{2}{q_2} - 1 \\
r &= \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5} = 20\%
\end{aligned}$$

2 Contrôle continu, décembre 1999

2.1 Intitulé

2.1.1 Exercice

(14 points) [L'intitulé a été modifié pour supprimer les références aux marchés de zéro-coupons en équilibre général - désormais hors programme]

On considère une économie comprenant trois périodes $t = 0, 1, 2$, peuplée de deux agents $i = r, v$: Robinson et Vendredi). Leurs préférences sont identiques et résumées par la fonction U :

$$U = \ln\left(c^i_0\right) + 0.8\ln\left(c^i_1\right) + 0.64\ln\left(c^i_2\right)$$

Chaque agent possède un arbre qui lui donne à chaque période une certaines quantités de fruits, sa dotation. Les fruits sont des biens périssables et non stockables. Robinson (r) récolte successivement ω^r_0 fruits à la période 0, ω^r_1 à la période 1, ω^r_2 à la période 2. Vendredi (l'agent v) reçoit lui successivement ω^v_0, ω^v_1, ω^v_2. Pour réaliser des échanges mutuellement avantageux et réaliser une allocation optimale de leurs récoltes de fruits, nos deux ingénieux héros se lancent dans l'innovation financière en construisant un système financier. Aussi, à la période 0, le bien de la période 0 est pris comme numéraire et un marché des fonds prêtables est mis en place permettant de prêter ou d'emprunter pour une période au taux r_1. A la période 1, de même, un nouveau marché des fonds prêtables est mis en place permettant pour une période de prêter ou d'emprunter au taux r_2. On notera S^i_0 et S^i_1 les sommes placées (ou empruntées si $S^i_t < 0$) par l'agent i aux périodes 0 et 1.

1. Les récoltes (=dotations) des agents sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\omega_0^r &= 750,\ \omega_1^r = 500,\ \omega_2^r = 250\\ \omega_0^v &= 250,\ \omega_1^v = 500,\ \omega_2^v = 750\end{aligned}$$

   (a) Déterminez pour chaque agent, les différentes contraintes budgétaires. Quelles sont les contraintes budgétaires intertemporelles des agents ? (2 points)
   (b) Calculez les valeurs à l'équilibre de r_1 et r_2. (2 points)
   (c) Déduisez-en rapidement les consommations à l'équilibre de chaque agent. Commentez. (2 points)
   (d) Si les agents disposaient d'une technologie de production donnant pour chaque unité de bien de la période 0 investie 1.2 unités de biens de la période 1, utiliseraient-ils cette technologie ? Même question pour une technique transformant chaque unité de bien de la période 0 en 1.4 unités de la période 2. (2 points)
   (e) Evaluez par arbitrage l'arbre de Robinson, celui de Vendredi. (2 points)

2. Malheureusement, avant que l'équilibre précédent puisse commencer à se réaliser, en 0, un cyclone tropical dévaste l'île de Robinson et Vendredi ; les arbres de nos deux personnages trépassent dans l'affaire. Heureusement, nos deux héros arrivent à sauver leur récolte initiale : $\omega_0^r = 750$ et $\omega_0^v = 250$. Nécessité faisant loi, pour survivre, ils abandonnent donc l'économie de la cueillette pour l'économie industrielle. Puisant dans leurs imaginations, nos deux héros inventent deux technologies produisant des biens futurs. Ainsi, Vendredi (v) découvre comment produire du bien de demain (période 1) en utilisant du bien d'aujourd'hui (période 0) ; il fonde l'entreprise *"Vendredi & Co"* dont il est l'unique actionnaire et dont la technique est résumée par la fonction de production suivante :

$$q_v = \sqrt{k_v}$$

   Robinson, lui, découvre le moyen de produire du bien de la période 2 à l'aide du bien d'aujourd'hui (période 0). Aussi fonde-t-il aussi une entreprise *"Robinson & Co"* dont il est l'unique actionnaire et dont la fonction de production est :

$$q_r = \sqrt{\frac{5}{4}k_r}$$

   (a) Donnez les fonctions de profit Π_r et Π_v des deux entreprises, les nouvelles contraintes budgétaires intertemporelles des deux agents (1 point)
   (b) Définissez les conditions de l'équilibre général de cette économie. (1 point)
   (c) Calculez l'équilibre général (3 points).
   (d) Evaluez chaque entreprise. (1 point)

2.2 Eléments de correction

Considérons d'abord l'économie d'échanges.

Les contraintes budgétaires séquentielles de chaque agent i sont données par les différentes contraintes emplois ressources. A la période 0, la seule ressource de chaque agent est sa dotation ω_0^i qu'il utilise pour sa consommation (c_0^i) ou pour épargner (S^i). Aussi, sa contrainte budgétaire de la période 0 s'écrit :

$$c_0^i + S_0^i = \omega_0^i$$

A la seconde période ($t = 1$), chaque i perçoit sa dotation exogène ω_1^i et le revenu de son épargne $(1 + r_1)S_0^i$ et les utilisent pour financer sa consommation c_1^i ainsi que son épargne S_1^i, d'om la contrainte budgétaire :

$$c_1^i + S_1^i = \omega_1^i + (1 + r_1)S_0^i$$

A la période 2, celle-ci étant sa dernière période, l'agent utilise la totalité de ses revenus à consommer, et donc sa contrainte budgétaire s'écrit :

$$c_2^i = \omega_2^i + (1 + r_2)S_1^i$$

En utilisant les contraintes budgétaires à rebours, on peut donc déterminer l'épargne en fonction des consommations et des taux d'intérêt :

$$t = 2 : S_1^i = \frac{c_2^i - \omega_2^i}{1 + r_2}$$

$$t=1: S_0^i=\frac{c_1^i-\omega_1^i}{1+r_1}+\frac{S_1^i}{1+r_1}\Rightarrow S_0^i=\frac{c_1^i-\omega_1^i}{1+r_1}+\frac{c_2^i-\omega_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)}$$

En substituant dans la contrainte budgétaire de la première période $t=0$ à S_0 son expression, on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle décrivant les consommations financièrement possibles pour l'agent i :

$$c_0^i+S_0^i=\omega_0^i\Rightarrow c_0^i+\frac{c_1^i-\omega_1^i}{1+r_1}+\frac{c_2^i-\omega_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)}=\omega_0^i$$

ou encore après regroupement des consommations à gauche de l'égalité, des dotations à droite :

$$c_0^i+\frac{c_1^i}{1+r_1}+\frac{c_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)}=\omega_0^i+\frac{\omega_1^i}{1+r_1}+\frac{\omega_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)}$$

Chaque agent en 0 sélectionne le plan de consommation $\left(c_0^i,c_1^i,c_2^i\right)$ et le plan d'épargne $\left(S_0^i,S_1^i\right)$ qui est le meilleur pour lui sous différentes contraintes. Son programme est donc :

$$\begin{cases}\max_{\left(c_0^i,c_1^i,c_2^i\right),\left(S_0^i,S_1^i\right)}\ln\left(c_0^i\right)+0.8\ln\left(c_1^i\right)+0.64\ln\left(c_2^i\right)\\ s.c.:\\ c_0^i+S_0^i=\omega_0^i\\ c_1^i+S_1^i=\omega_1^i+(1+r_1)S_0^i\\ c_2^i=\omega_2^i+(1+r_2)S_1^i\end{cases}$$

lequel est équivalent à résoudre :

$$\begin{cases}\max_{\left(c_0^i,c_1^i,c_2^i\right)}\ln\left(c_0^i\right)+0.8\ln\left(c_1^i\right)+0.64\ln\left(c_2^i\right)\\ s.c.:\\ c_0^i+\frac{c_1^i}{1+r_1}+\frac{c_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)}=\omega_0^i+\frac{\omega_1^i}{1+r_1}+\frac{\omega_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)}\end{cases}$$

les montants d'épargne S_0^i et S_1^i étant déterminés par les consommations solutions de ce programme d'après les équations :

$$S_0^i=\frac{c_1^i-\omega_1^i}{1+r_1}+\frac{c_2^i-\omega_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)}$$

$$S_1^i=\frac{c_2^i-\omega_2^i}{1+r_2}$$

Les consommations optimales (pour i) sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases}Tms_{0\to1}^i=\frac{1}{1+r_1}\\ Tms_{0\to2}^i=\frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\\ c_0^i+\frac{c_1^i}{1+r_1}+\frac{c_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)}=\omega_0^i+\frac{\omega_1^i}{1+r_1}+\frac{\omega_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)}\end{cases}$$

L'expression des Tms est :

$$Tms_{0\to1}^i=0.8\left(\frac{c_0^i}{c_1^i}\right),\ Tms_{0\to2}^i=(0.8)^2\left(\frac{c_0^i}{c_2^i}\right)$$

Les préférences sont identiques, les Tms sont homogènes de degré 0 par rapport aux consommations, le système complet de marchés de fonds prêtables assure que chaque agent égalise ses Tms aux prix des actifs, et donc à l'équilibre les Tms sont égalisés :

$$\begin{aligned}Tms_{0\to1}^r&=Tms_{0\to1}^v\\ Tms_{0\to2}^r&=Tms_{0\to2}^v\end{aligned}$$

Il existe donc un agent représentatif dont la fonction d'utilité est la même que celles des agents :

$$\ln(c_0)+0.8\ln(c_1)+0.64\ln(c_2)$$

dont la consommation à l'équilibre est la consommation globale des agents :

$$\begin{cases}c_0=c_0^r+c_0^v\\ c_1=c_1^r+c_1^v\\ c_2=c_2^r+c_2^v\end{cases}$$

dont le Tms est égal aux prix d'équilibre :

$$Tms_{0\to 1} = 0.8\left(\frac{c_0}{c_1}\right) = \frac{1}{1+r_1}$$

$$Tms_{0\to 2} = (0.8)^2\left(\frac{c_0}{c_2}\right) = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}$$

Cette dernière relation peut se réécrire d'une manière plus simple. En effet, comme

$$Tms_{0\to 2} = Tms_{0\to 1}\times Tms_{1\to 2} = \frac{1}{1+r_1}\times Tms_{1\to 2}$$

elle peut être remplacée par la condition :

$$Tms_{1\to 2} = 0.8\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \frac{1}{1+r_2}$$

Comme, dans notre économie d'échanges, à l'équilibre, la consommation de l'agent représentatif est égal à la dotation totale de l'économie, les prix d'équilibre sont donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+r_1} &= 0.8\left(\frac{c_0}{c_1}\right) = 0.8\left(\frac{\omega_0^r+\omega_0^v}{\omega_1^r+\omega_1^v}\right) = 0.8\left(\frac{750+250}{500+500}\right) = 0.8 = \frac{4}{5}\\ \frac{1}{1+r_2} &= 0.8\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = 0.8\left(\frac{500+500}{250+750}\right) = 0.8 = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

et donc les taux d'intérêt sont :

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{5}{4}-1 = \frac{1}{4}\\ r_2 &= \frac{5}{4}-1 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Comme à l'équilibre chaque agent i égalise ses Tms à ces prix, on a nécessairement :

$$\left.\begin{array}{l} Tms^i_{0\to 1} = 0.8\left(\frac{c_0^i}{c_1^i}\right) = 0.8\\ Tms^i_{0\to 2} = (0.8)^2\left(\frac{c_0^i}{c_2^i}\right) = (0.8)^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} c_0^i = c_1^i\\ c_0^i = c_2^i\end{array}\right.$$

Autrement dit, les consommations lissent complètement leurs consommations à l'équilibre. Aussi, la valeur des consommations est directement donnée par la contrainte budgétaire puisque l'on a :

$$c_0^i + \frac{c_1^i}{1+r_1} + \frac{c_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)} = \omega_0^i + \frac{\omega_1^i}{1+r_1} + \frac{\omega_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)}$$

Les consommations sont donc :

$$c_0^i = c_1^i = c_2^i = \frac{\omega_0^i + \frac{\omega_1^i}{1+r_1} + \frac{\omega_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)}}{1+\frac{1}{1+r_1}+\frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}} = \frac{\omega_0^i + 0.8\omega_1^i + 0.64\omega_2^i}{1+0.8+0.64}$$

et donc numériquement :

$$c_0^r = c_1^r = c_2^r = \frac{750+0.8\,(500)+0.64\,(250)}{1+0.8+0.64} \simeq 536.89$$

$$c_0^r = c_1^r = c_2^r = \frac{250+0.8\,(500)+0.64\,(750)}{1+0.8+0.64} \simeq 463.11$$

Le lissage des consommations est la double conséquence de la préférence des agents pour la stabilisation de leurs consommation et de la stationnarité de la dotation globale (à 500).

Si les agents disposaient de technologies de production, ils ne les utiliseraient que si aux prix initiaux d'équilibre, elles dégageraient un profit positif. Or, le profit par unité produite est avec la première technique négatif puisqu'égal à

$$(1.2)\,\frac{1}{1+r_1} - 1 = \frac{6}{5}\frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{25} < 0$$

De même, le profit actualisé (par unité investie) avec la deuxième technique est négatif :

$$(1.4)\ \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} - 1 = \frac{7}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{13}{125} < 0$$

Donc, si les agents disposaient de ces techniques, ils ne les utiliseraient pas à l'équilibre.

Les deux arbres sont des biens durables engendrant des flux de revenus (numéraires). Comme tout actif, tout bien durable, sa valeur est donnée par la valeur actualisée des revenus qu'il donne. Aussi, l'arbre de Robinson aura comme valeur V_r :

$$\begin{aligned} V_r &= \omega_0^r + \frac{1}{1+r_1}\omega_1^r + \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\omega_2^r \\ &= 750 + 0.8\,(500) + (0.8)^2\,250 = 1310.0 \end{aligned}$$

Celui de Vendredi vaudra lui :

$$\begin{aligned} V_v &= \omega_0^v + \frac{1}{1+r_1}\omega_1^v + \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\omega_2^v \\ &= 250 + 0.8\,(500) + (0.8)^2\,750 = 1130.0 \end{aligned}$$

(2) Après le passage de l'ouragan, Vendredi dispose donc de la technique courte :

$$q_v = \sqrt{k_v}$$

Robinson dispose de la technique longue :

$$q_r = \sqrt{\frac{5}{4}k_r}$$

Le profits de l'entreprise *"Vendredi & Co"* s'écrit donc en fonction du capital investi :

$$\Pi_v\left(k_v; r_1\right) = \frac{1}{1+r_1}\sqrt{k_v} - k_v$$

Le système de marchés étant complet, chaque actionnaire (i.e. ici uniquement Vendredi) désire que le profit soit maximisé. Ceci est réalisé lorsque l'entreprise sélectionne l'investissement annulant la dérivée du profit :

$$\frac{\partial}{\partial k_v}\Pi_v\left(k_v; r_1\right) = \frac{1}{2(1+r_1)\sqrt{k_v}} - 1 = 0 \Rightarrow k_v\left(r_1\right) = \left(\frac{0.5}{1+r_1}\right)^2$$

Le profit maximum pour chaque r_1 est donc :

$$\Pi_v^{\max}\left(r_1\right) = \frac{1}{1+r_1}\sqrt{\left(\frac{0.5}{1+r_1}\right)^2} - \left(\frac{0.5}{1+r_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{(1+r_1)^2}$$

De même, pour l'autre entreprise *"Robinson & Co"*, sa fonction de profit s'écrit en fonction du capital investi :

$$\Pi_r\left(k_r; r_1, r_2\right) = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\sqrt{\frac{5}{4}k_r} - k_r$$

Le système de marchés étant complet, chaque actionnaire (i.e. ici uniquement Robinson) désire que le profit soit maximisé. Ceci est réalisé lorsque l'entreprise sélectionne l'investissement annulant la dérivée du profit :

$$\frac{\partial}{\partial k_r}\Pi_r\left(k_r; r_1, r_2\right) = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{k_r}} - 1 = 0 \Rightarrow k_r\left(r_1, r_2\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\right)^2$$

Le profit maximum pour chaque couple (r_1, r_2) est donc :

$$\begin{aligned} \Pi_r^{\max}\left(r_1, r_2\right) &= \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\sqrt{\frac{5}{4}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\right)^2} - \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4}\left(\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\right)^2 \\ &= \frac{5}{16}\frac{1}{((1+r_1)(1+r_2))^2} \end{aligned}$$

Chaque ménage i intègre dans sa contrainte budgétaire le profit de l'entreprise dont il est l'unique actionnaire et donc sa contrainte budgétaire intertemporelle devient :

$$c_0^i + \frac{c_1^i}{1+r_1} + \frac{c_1^i}{(1+r_1)(1+r_2)} = \omega_0^i + \frac{\omega_1^i}{(1+r_1)} + \frac{\omega_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)} + \Pi_i$$

Ses demandes $c_0^i(r_1, r_2)$, $c_1^i(r_1, r_2)$, $c_2^i(r_1, r_2)$ (en fonction des taux r_1 et r_2) sont données par les solutions du système :

$$\begin{cases} Tms_{0\to1}^i = \frac{1}{(1+r_1)} \\ Tms_{0\to2}^i = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} \\ c_0^i + \frac{c_1^i}{1+r_1} + \frac{c_1^i}{(1+r_1)(1+r_2)} = \omega_0^i + \frac{\omega_1^i}{(1+r_1)} + \frac{\omega_2^i}{(1+r_1)(1+r_2)} + \Pi_i \end{cases}$$

Les conditions d'équilibre sur les différents marchés sont donc :

$$\begin{cases} c_0^r(r_1, r_2) + c_0^v(r_1, r_2) + k_v(r_1) + k_r(r_1, r_2) = \Omega_0 \\ c_1^r(r_1, r_2) + c_1^v(r_1, r_2) = \sqrt{k_v(r_1)} \\ c_2^r(r_1, r_2) + c_2^v(r_1, r_2) = \sqrt{\frac{5}{4}k_r(r_1, r_2)} \end{cases}$$

Comme l'équilibre est toujours optimal au sens de Pareto, il est toujours possible d'utiliser un agent représentatif pour caractériser rapidement l'équilibre. Avec l'agent représentatif, les conditions déterminant les valeurs à l'équilibre de la consommation globale et de l'investissement sont les suivantes :

$$\begin{cases} Tms_{0\to1} = 0.8\left(\frac{c_0}{c_1}\right) = 2\sqrt{k_v} = TMT_{0\to1} \\ Tms_{0\to2}^i = (0.8)^2\left(\frac{c_0}{c_2}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{k_r} = TMT_{0\to2} \\ c_0 + k_v + k_r = \Omega_0 \\ c_1 = \sqrt{k_v} \\ c_2 = \sqrt{\frac{5}{4}k_r} \end{cases}$$

puisqu'à l'équilibre l'agent représentatif égalise ses Tms aux prix alors que les entreprises égalisent leurs TMT (l'inverse de la productivité marginale) à ces mêmes prix pour maximiser leurs profits. Par substitution, l'égalisation des Tms aux TMT donne simplement :

$$\begin{cases} Tms_{0\to1} = 0.8\left(\frac{\Omega_0 - k_v - k_r}{\sqrt{k_v}}\right) = 2\sqrt{k_v} = TMT_{0\to1} \\ Tms_{0\to2}^i = (0.8)^2\left(\frac{\Omega_0 - k_v - k_r}{\sqrt{\frac{5}{4}k_r}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{k_r} = TMT_{0\to2} \end{cases}$$

En réarrangeant on obtient :

$$\begin{cases} 0.8(\Omega_0 - k_v - k_r) = 2k_v \\ (0.8)^2(\Omega_0 - k_v - k_r) = 2k_r \end{cases}$$

et donc en faisant le rapport des deux conditions, on obtient immédiatement que :

$$k_r = 0.8k_v$$

et donc les investissements à l'équilibre sont

$$\frac{4}{5}\left(\Omega_0 - k_v - \left(\frac{4}{5}k_v\right)\right) = 2k_v \Rightarrow \frac{4}{5}\Omega_0 - \frac{4}{5}k_v(\frac{9}{5}) = 2k_v$$

$$\frac{4}{5}\Omega_0 = k_v(2 + \frac{4}{5}\frac{9}{5}) \Rightarrow \frac{20}{25}\Omega_0 = k_v\frac{50+36}{25} \Rightarrow k_v = \frac{10}{43}\Omega_0$$

Numériquement :

$$\Omega_0 = 1000$$

$$k_v = \frac{10000}{43} \simeq 232.56,\ k_r = \frac{8000}{43} \simeq 186.05,\ c_0 = \frac{25000}{43} \simeq 581.4$$

$$q_v = \sqrt{\frac{10000}{43}} \simeq 15.25$$

$$q_r = \sqrt{\frac{5}{4}\frac{8000}{43}} \simeq 15.25$$

Lorsque les quantités d'équilibre sont déterminées, les taux d'intérêt sont donnés notamment par les valeurs des Tms de l'agent représentatif :

$$\frac{1}{1+r_1} = \frac{4}{5}\frac{\frac{25000}{43}}{\sqrt{\frac{10000}{43}}} = \frac{200}{43}\sqrt{43} = 30.5 \Rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{43}}{200} - 1 = -0.967\,21$$

$$\frac{1}{1+r_2} = \left(\frac{4}{5}\right)\frac{\sqrt{\frac{10000}{43}}}{\sqrt{\frac{10000}{43}}} = \frac{4}{5} \Rightarrow r_2 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

Par conséquent, la valeur des deux entreprises à l'équilibre est :

$$\Pi_v\,(30.5) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+r_1}\right)^2 = \frac{(30.5)^2}{4} \simeq 232.56$$

$$\Pi_r\,(24.4) = \frac{5}{16}\left(\frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\right)^2 = \frac{5}{16}\,(24.4)^2 \simeq 186.05$$

3 Partiel, février 2000

3.1 Intitulé

3.1.1 Cours (5 points)

Au choix, une des deux questions suivantes :
(a) Le théorème de séparation des décisions de production et de consommation
(b) Aversion au risque et assurance

3.1.2 Exercice 2

(10 points) L'économie comprend deux périodes $t = 0, 1$, trois états futurs du monde $s = 1, 2, 3$ dont les probabilités sont : $\pi(1) = 1/4 = \pi(3)$, $\pi(2) = 1/2$. Elle est composée deux pays (= deux agents) : madame Europe et monsieur US. Les préférences de ceux-ci sont identiques et représentées par la fonction :

$$U_i = \ln\left(c_0^i\right) + 0.8\sum_{s=1}^{3}\pi(s)\,.\ln\left(c_s^i\right)$$

Les deux pays disposent de dotations non stockables à la période 0, $\omega^{us}(0) = 40$ et $\omega^{eu}(0) = 60$, les biens futurs sont produits (sans aucun coût) par deux entreprises - respectivement"Europe & Co" et "USA & Co". Les quantités délivrées sont selon les états de nature :

	1	2	3
Europe & Co ($y_{eu}(s)$)	80	25	0
USA & Co ($y_{us}(s)$)	0	75	120

Chaque entreprise livre à ses propriétaires leurs productions (proportionnellement aux parts possédées). Initialement, madame Europe possède la totalité de l'entreprise "Europe & Co", monsieur US la totalité de "USA & Co". *Le bien de la première date sera toujours pris comme numéraire.*

1. Déterminer les prix de l'équilibre à la Arrow-Debreu de cette économie. (2 points)
2. Calculer le taux d'intérêt d'équilibre. (1 point)

   Plutôt que le précédent système à la Arrow-Debreu, les agents choisissent de mettre en place un système financier comprenant un marché sur lequel on peut prêter ou emprunter au taux d'intérêt r, et un marché boursier. Sur ce dernier, sont cotées les deux entreprises. On note θ_{us}^i, θ_{eu}^i les parts détenus par l'agent i, i.e. si $\theta_{us}^i = 1/2$ l'agent i possède la moitié de l'entreprise USA & Co et reçoit en conséquence la moitié des quantités produites à la seconde période. On notera B^i l'endettement contracté par l'agent i à la première période, q_j la valeur boursière de l'entreprise j - $j = eu$, us.

3. Calculer la valeur boursière des deux entreprises et le taux d'intérêt d'équilibre. (2points)
4. Déterminer le portefeuille financier que détient à l'équilibre chaque agent. (2 points)

5. Comment peut-on expliquer qu'à l'équilibre la consommation future de l'Europe est d'autant plus élevée que sa production est faible : (1 point)

$$c^{eu}(1) < c^{eu}(2) < c^{eu}(3)$$

$$y_{eu}(1) > y_{eu}(2) > y_{eu}(3)$$

6. Le marché du crédit est fermé, seule demeure le marché boursier. Mais, la globalisation financière conduit à la mise en place d'un unique fonds commun de placement (f). Celui-ci possède un portefeuille dont les participations sont diversifiées (égales) : $\theta_{us}^{f} = \theta_{eu}^{f}$, dont l'endettement est nul : $B^{f} = 0$. Il émet des parts que peuvent acheter les agents privés, i.e. madame Europe et monsieur US. La part possédée par chaque agent i dans f est notée θ_{f}^{i}. En utilisant vos résultats antérieurs, déterminer le(s) portefeuille(s) d'équilibre de chaque agent i. L'équilibre peut-il être une situation où toutes les entreprises sont possédées par le fonds, i.e. où les agents privés se contentent de détenir des parts du fcp ? (2 points)

3.2 Eléments de correction de l'exercice 2

(1) Si l'on suppose qu'un système de marchés à terme à la Arrow-Debreu est mis en place, chaque agent utilise en 0 ce système de marchés pour modifier ses consommations. Les ressources de chaque agent i sont soit sa dotation initiale $\omega^{i}(0)$, soit les dividendes versés demain par l'entreprise dont il est l'unique propriétaire $y_i(s)$. Sur les marchés à terme, en 0, chaque agent i peut acheter des contrats à terme sur chaque bien contingent. Si l'on note z_s^i la quantité de contrats achetés portant sur le bien contingent de la date-événement s $(s = 1, 2, 3)$, les contraintes budgétaires de seconde période s'écrivent :

$$c^{i}(s) = y_i(s) + z_s^i,\ s = 1, 2, 3$$

A la première période, celle d'ouverture des marchés, les agents dispose de leurs dotations initiales pour leurs consommations et pour acheter les contrats :

$$c^{i}(0) + \sum_{s=1}^{3} \beta_s . z_s^i = \omega^{i}(0)$$

Par consolidation de ces contraintes budgétaires, on obtient la contrainte intertemporelle des agents :

$$c^{i}(0) + \sum_{s=1}^{3} \beta_s . c_s^i = \omega^{i}(0) + \sum_{s=1}^{3} \beta_s . \omega_s^i$$

En 0, sur les marchés, les agents choisissent les quantités de contrats au mieux de leurs intérêts compte tenu de leurs contraintes budgétaires :

$$\begin{cases} \max_{(z_s^i)_{s=1,2,3}} \ln\left(c_0^i\right) + \beta \sum_{s=1}^{3} \pi(s) . \ln\left(c_s^i\right) \\ s.c. : \\ c^{i}(0) + \sum_{s=1}^{3} \beta_s . z_s^i = \omega^{i}(0) \\ c^{i}(1) = y_i(1) + z_1^i, \\ c^{i}(2) = y_i(2) + z_2^i, \\ c^{i}(3) = y_i(3) + z_3^i, \\ c^{i}(0) \geq 0,\ c^{i}(1) \geq 0,\ c^{i}(2) \geq 0,\ c^{i}(3) \geq 0 \end{cases}$$

ou au programme équivalent pour les consommations :

$$\begin{cases} \max_{(z_s^i)_{s=1,2,3}} \ln\left(c_0^i\right) + \beta \sum_{s=1}^{3} \pi(s) . \ln\left(c_s^i\right) \\ s.c. : \\ c^{i}(0) + \sum_{s=1}^{3} \beta_s . c_s^i = \omega^{i}(0) + \sum_{s=1}^{3} \beta_s . \omega_s^i \\ c^{i}(0) \geq 0,\ c^{i}(1) \geq 0,\ c^{i}(2) \geq 0,\ c^{i}(3) \geq 0 \end{cases}$$

Via les contraintes budgétaires des dates-événements $s = 1, 2, 3$, les consommations solutions de ce dernier programme définissent les quantités de contrats. Comme les contraintes de positivité peuvent être ignorées (avec la fonction d'utilité élémentaire ln), les demandes sont déterminées par la contrainte budgétaire intertemporelle et par les conditions marginales habituelles ; elles sont donc les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} Tms_{0\to1}^{i} = \beta\pi(1) . \frac{c^{i}(0)}{c^{i}(1)} = \beta_1 \\ Tms_{0\to2}^{i} = \beta\pi(2) . \frac{c^{i}(0)}{c^{i}(2)} = \beta_2 \\ Tms_{0\to3}^{i} = \beta\pi(3) . \frac{c^{i}(0)}{c^{i}(3)} = \beta_3 \\ c^{i}(0) + \sum_{s=1}^{3} \beta_s . c_s^i = \omega^{i}(0) + \sum_{s=1}^{3} \beta_s . \omega_s^i \end{cases}$$

Les demandes nettes de contrats, que les demandes de bien définissent, doivent évidemment vérifier les contraintes de marchés :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_i z_1^i = 0 \\ \sum_i z_2^i = 0 \\ \sum_i z_2^i = 0 \end{array}\right.$$

Compte tenu des contraintes budgétaires, le respect de ces contraintes de marchés est équivalent à celui des contraintes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_i c^i(0) = \sum_i \omega^i(0) \\ \sum_i c^i(1) = \sum_i y_1(1) \\ \sum_i c^i(2) = \sum_i y_1(2) \\ \sum_i c^i(3) = \sum_i y_i(3) \end{array}\right.$$

Pour déterminer les prix d'équilibre, comme les Tms sont identiques et homogènes de degré 1, que l'équilibre est un optimum de Pareto, on peut directement utiliser l'agent représentatif. Par conséquent, comme les consommations de celui-ci c^{AR} :

$$c^{AR} = \left(c^{AR}(0), c^{AR}(1), c^{AR}(2), c^{AR}(3)\right)$$

sont à l'équilibre les dotations de l'économie, on a néssairement :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= Tms_{0\to1}^{AR} = \beta\pi(1)\frac{y_{eu}(0)+y_{us}(0)}{y_{eu}(1)+y_{us}(1)} \\ &= \frac{4}{5}\frac{1}{4}\frac{60+40}{80+0} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= Tms_{0\to2}^{AR} = \beta\pi(2)\frac{y_{eu}(0)+y_{us}(0)}{y_{eu}(2)+y_{us}(2)} \\ &= \frac{4}{5}\frac{1}{2}\frac{60+40}{25+75} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= Tms_{0\to3}^{AR} = \beta\pi(3)\frac{y_{eu}(0)+y_{us}(0)}{y_{eu}(3)+y_{us}(3)} \\ &= \frac{4}{5}\frac{1}{4}\frac{60+40}{0+120} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Le taux d'intérêt est évidemment déterminé par le coût du portefeuille versant une unité de numéraire quel que soit l'état du monde, i.e. $\beta_1+\beta_2+\beta_3$. Par conséquent :

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = \frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6} = \frac{15+24+10}{60} = \frac{49}{60}$$

$$r = \frac{1}{\beta_1+\beta_2+\beta_3} - 1 = \frac{11}{60} = .18333$$

Les demandes sont évidemment de la forme :

$$c_0^i = \frac{1}{1+\beta}\left(y_i(0)+\beta_1.y_i(1)+\beta_2.y_i(2)+\beta_3.y_i(3)\right)$$

$$c_s^i = \frac{\beta\pi_s}{1+\beta}\frac{\left(y_i(0)+\beta_1.y_i(1)+\beta_2.y_i(2)+\beta_3.y_i(3)\right)}{\beta_s}$$

Si l'on note les richesses des pays :

$$W_{us} = y_{us}(0)+\beta_1.y_{us}(1)+\beta_2.y_{us}(2)+\beta_3.y_{us}(3)$$

$$W_{eu} = y_{eu}(0)+\beta_1.y_{eu}(1)+\beta_2.y_{eu}(2)+\beta_3.y_{eu}(3)$$

comme les fonctions de demandes sont identiques et **linéaires par rapport à la richesse**, les consommations de chaque pays sont proportionnelles à sa part dans la richesse mondiale :

$$\begin{aligned} \frac{c_0^{eu}}{c_0^{us}} &= \frac{c_1^{eu}}{c_1^{us}} = \frac{c_2^{eu}}{c_2^{us}} = \frac{c_3^{eu}}{c_3^{us}} = \frac{W_{eu}}{W_{us}} \\ &\Rightarrow \forall s=0,1,2,3 : c_s^{eu} = \frac{W_{eu}}{W_{eu}+W_{us}}\Omega_s,\ c_s^{us} = \frac{W_{us}}{W_{eu}+W_{us}}\Omega_s \end{aligned}$$

Le calcul des richesses nous donne :

$$\begin{aligned} W_{us} &= 40+\frac{1}{4}.0+\frac{2}{5}.75+\frac{1}{6}.120=90 \\ W_{eu} &= 60+\frac{1}{4}.80+\frac{2}{5}.25+\frac{1}{6}.0=90 \end{aligned}$$

Par conséquent, les deux pays de fait se partage la production mondiale :

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ c_s^{us}=c_s^{eu} & 50 & 40 & 50 & 60 \end{array}$$

(3) (4) (5) Plutôt que le précédent système à la Arrow-Debreu, les agents choisissent de mettre en place un véritable système financier comprenant un marché sur lequel on peut prêter ou emprunter au taux d'intérêt r, et d'un marché boursier. Sur ce dernier dernier, sont côtés les deux entreprises, c'est-à-dire sont vendues ou achetées des parts sur les entreprises ouvrant droit aux bénéfices futurs. On note θ_{us}^i, θ_{eu}^i les parts détenus par l'agent i, i.e. si $\theta_{us}^i=1/2$ l'agent possède la moitié de l'entreprise USA & Co et reçoit en conséquence la moitié des quantités produites à la seconde période. Les quantités produites à la première période sont livrées aux propriétaires initiaux dont les parts sont notées $\theta_{us}^{i,-}$ et $\theta_{eu}^{i,-}$

	$Europe$	$Etats-Unis$
Europe & Co	1	0
USA & Co	0	1

On notera B^i l'endettement contracté par l'agent i à la première période, q_j la valeur boursière de l'entreprise j - $j=eu,us$.

Les contraintes budgétaires de chaque agent s'écrivent donc :

$$\begin{gathered} c_0^i+q_{us}\theta_{us}^i+q_{eu}\theta_{eu}^i=\theta_{us}^{i,-}(y_{us}(0)+q_{us})+\theta_{eu}^{i,-}(y_{eu}(0)+q_{eu})+B^i \\ c_1^i=\theta_{us}^i y_{us}(1)+\theta_{eu}^i(y_{eu}(1)-(1+r)B^i \\ c_2^i=\theta_{us}^i y_{us}(2)+\theta_{eu}^i(y_{eu}(2)-(1+r)B^i \\ c_3^i=\theta_{us}^i y_{us}(3)+\theta_{eu}^i(y_{eu}(3)-(1+r)B^i \end{gathered}$$

Pour calculer les valeurs boursières des deux entreprises, on détermine d'abord la complétude des marchés. Comme il existe trois actifs dont les vecteurs de revenus sont les suivants :

$$V_B=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ V_{eu}=\begin{bmatrix}80\\25\\0\end{bmatrix},\ V_{us}=\begin{bmatrix}0\\75\\120\end{bmatrix}$$

et que ces trois vecteurs de revenus ne sont évidemment pas colinéaires, la combinaison linéaire de ces trois actifs engendre donc tout l'espace des revenus futurs possibles. Les marchés sont donc complets et les prix des actifs sont donc les valeurs des revenus futurs actualisés à l'aide des prix des états obtenus à l'équilibre d'Arrow-Debreu (équivalence entre A-D et équilibre avec marchés complets). Aussi, a-t-on :

$$q_{eu}=\sum_s \beta_s.y_{eu}(s)=\frac{1}{4}(80)+\frac{2}{5}(25)+\frac{1}{6}(0)=30$$

$$q_{us}=\sum_s \beta_s.y_{us}(s)=\frac{1}{4}(0)+\frac{2}{5}(75)+\frac{1}{6}(120)=50$$

$$r=\frac{11}{60}$$

Comme les marchés sont complets, les consommations des pays sont données par les consommations de l'équilibre d'Arrow-Debreu, et donc les portefeuilles de l'équilibre sont ceux permettant d'obtenir ces consommations. Numériquement, on a donc pour l'Europe :

$$\begin{cases} c_0^{eu}=90+B^{eu}-30\theta_{eu}^{eu}-50\theta_{us}^{eu}=50 \\ c_1^{eu}=80\theta_{eu}^{eu}-\frac{71}{60}B^{eu}=40 \\ c_2^{eu}=75\theta_{us}^{eu}+25\theta_{eu}^{eu}-\frac{71}{60}B^{eu}=50 \\ c_3^{eu}=120\theta_{us}^{eu}-\frac{71}{60}B^{eu}=60 \end{cases}$$

$$\theta_{eu}^{eu}=\frac{1}{2},\theta_{us}^{eu}=\frac{1}{2},B^{eu}=0$$

Lorsque l'économie est complète, la consommation de chaque pays est dictée par la consommation globale (= production globale). Aussi, la consommation de l'Europe n'est pas déterminée par sa production.

4 Contrôle continu, décembre 2000

4.1 Intitulé

4.1.1 Cours (8 points)

Au choix deux des trois questions suivantes :

(1) A quelles conditions l'équilibre d'un mécanisme de chambre de compensation est-il parfaitement concurrentiel ? (4 points)

(2) Une productivité supérieure se traduit-elle nécessairement à l'équilibre par un investissement supérieur ? (4 points)

(3) L'optimalité parétienne de l'équilibre est-elle possible sans la complétude des marchés financiers ? (4 points)

4.1.2 Exercice 1 (4 points)

[L'intitulé a été modifié pour supprimer les références aux marchés de zéro-coupons en équilibre général - désormais hors programme]

On considère une économie de production comportant deux périodes $t = 0, 1$ dont Robinson (r) et Vendredi (v) sont les agents. A chaque période, il existe un unique bien qui peut être consommé ou utilisé comme facteur de production. A la période 0, le secteur productif peut transformer le bien de la période 0 en bien de la période 1 en utilisant la technique résumée par la fonction de production suivante : $q_1 = \theta\,(k_0)^{\frac{4}{5}}$, où k_0 est la quantité du bien de la *période 0* utilisée comme facteur de production par le secteur productif, où $\theta > 0$ est un paramètre de productivité.

Vendredi et Robinson héritent initialement (à la période 0 donc) des dotations suivantes : $\omega^r = 75$, $\omega^v = 25$, et sont propriétaires des entreprises. Les préférences des deux compères sont identiques et résumées par la fonction d'utilité : $U_i = \left(c_0^i\right)\left(c_1^i\right)^{\frac{4}{5}}$, $i = v, r$. Initialement, à la date 0, les individus et le secteur productif peuvent prêter ou emprunter sur un marché de fonds prêtables au taux d'intérêt r_1. On notera S_0^i l'épargne en 0 de l'agent i. Les marchés sont tous supposés être en CPP.

(1) En exploitant l'existence d'un agent représentatif, donnez pour $\theta = 5$ le système déterminant les quantités globales de l'équilibre général (k_0, q_1). Calculez ces valeurs, puis déterminez le taux d"intérêt de l'économie. (2 points)

(2) Donnez la valeur (boursière) du secteur productif en 0. (1 point)

(3) En vous servant des relations obtenues pour la question 1, déterminer l'impact qualitatif d'une hausse du paramètre de productivité θ sur l'investissement. (1 point)

4.1.3 Exercice 2 (8 points)

On considère une économie comprenant trois périodes $t = 0, 1, 2$, peuplée de deux agents Robinson (r) et Vendredi (v). Les préférences de Robinson sont résumées par la fonction U_r :

$$U_r = \ln\left(c_0^r\right) + 0.8\ln\left(c_1^r\right) + 0.64\ln\left(c_2^r\right)$$

celles de Vendredi par : $U_v = \left(c_0^v\right)\left(c_1^v\right)^{\frac{4}{5}}\left(c_2^v\right)^{\frac{16}{25}}$. Chaque agent possède un arbre qui lui donne *à chaque période* une certaines quantités de fruits, sa dotation. Les fruits sont des biens périssables et non stockables. Robinson (r) récolte successivement ω_0^r fruits à la période 0, ω_1^r à la période 1, ω_2^r à la période 2. Vendredi (l'agent v) reçoit lui successivement ω_0^v, ω_1^v, ω_2^v. Le bien de chaque période est pris comme numéraire de celle-ci. Pour réaliser des échanges mutuellement avantageux et réaliser une allocation optimale de leurs récoltes de fruits, nos deux ingénieux héros se lancent dans l'innovation financière : ils décident de mettre en place en $t = 0$ un marché "monétaire" sur lequel il pourront prêter ou emprunter *pour une période* du numéraire de la période 0 au taux d'intérêt r_1. Ce marché "monétaire" sera réouvert à la période $t = 1$: les agents pourront alors à nouveau prêter ou emprunter du numéraire pour une période au taux d'intérêt r_2. Le marché fonctionne à chaque période en CPP et on notera S_1^i et S_2^i les montants prêtés par l'agent i aux périodes $t = 0$ et $t = 1$.

Les récoltes (= dotations) des agents sont les suivantes :

$$\omega_0^r = 750,\ \omega_1^r = 400,\ \omega_2^r = 800,\ \omega_0^v = 250,\ \omega_1^v = 800,\ \omega_2^v = 640$$

(1) Déterminez pour chaque agent, les différentes contraintes budgétaires. Quelles sont les contraintes budgétaires intertemporelles des agents ? (2 points)

(2) Après avoir démontré l'existence d'un agent représentatif dont la fonction d'utilité est :

$$U_{AR} = \ln\left(c_0^{AR}\right) + 0.8\ln\left(c_1^{AR}\right) + 0.64\ln\left(c_2^{AR}\right)$$

où c_0^{AR}, c_1^{AR}, c_2^{AR} sont les consommations de l'agent représentatif aux différents périodes, calculez les valeurs à l'équilibre des taux d'intérêt courts r_1 et r_2. (2 points)

(3) Evaluer le taux d'intérêt r d'une obligation classique émise en 0 et d'échéance 2, i.e. d'un titre qui, par unité placée, rapporte r à chaque période ($t = 1, 2$) augmenté à l'échéance du capital. (2 points)

(4) Vendredi envisage de vendre son arbre, i.e. le droit aux récoltes futures. Vaut-il mieux pour lui le vendre immédiatement à la période 0 ou attendre pour recevoir la forte récolte de la période 1 ($\omega_1^v = 800$) et seulement alors le vendre ? Justifiez votre réponse. (2 points)

4.2 Eléments de correction de l'exercice 1

(1) L'économie ne comportant qu'une période future, comprenant un marché de fonds prêtables, la structure des marchés est donc complète. L'équilibre général sera donc optimal. Les deux agents ont les mêmes préférences, leurs Tms sont égaux :

$$Tms_{0\to1}^i = \frac{\frac{\partial}{\partial c_1}U_i}{\frac{\partial}{\partial c_0}U_i} = \frac{\frac{4}{5}\frac{U_i}{c_1^i}}{\frac{U_i}{c_0^i}} = \frac{4}{5}\frac{c_0^i}{c_1^i}$$

et sont donc homogène de degré 0. Il existe donc un agent représentatif dans l'économie ; ses consommations sont les consommations des agents. Or, l'investissement de l'entreprise est k_0 et donc à l'équilibre on a :

$$\begin{aligned} c_0^r + c_0^v &= \omega_0^r + \omega_0^v - k_0 \\ &= 100 - k_1 \end{aligned}$$

et à la période 1 la quantité disponible dans l'économie est la quantité produite :

$$c_1^r + c_1^v = f_1(k_0) = \theta (k_0)^{\frac{4}{5}}$$

A l'équilibre, l'agent représentatif sélectionne une consommation optimale pour lui dans se contrainte budgétaire : la condition marginale usuelle (Tms = prix relatif) prend donc ici la forme suivante :

$$Tms_{0\to1}^{AR} = \frac{4}{5}\frac{100-k_0}{\theta (k_0)^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{1+r_1}$$

L'entreprise a pour profit :

$$\Pi = \frac{1}{1+r_1} f(k_0) - k_0$$

et la maximisation du profit donne la condition suivante :

$$\frac{1}{1+r_1} f'(k_0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+r_1} = \frac{1}{f'(k_0)}$$

Par conséquent, à l'équilibre on a :

$$Tms_{0\to1}^{AR} = \frac{1}{f'(k_0)}$$

Or :

$$f'(k_0) = \frac{4}{5}\theta (k_0)^{-\frac{1}{5}}$$

et donc la condition s'écrit ici plus précisément :

$$\frac{4}{5}\frac{100-k_0}{\theta (k_0)^{\frac{4}{5}}} = \frac{(k_0)^{\frac{1}{5}}}{\frac{4}{5}\theta}$$

d'où :

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 (100-k_0) = k_0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\quad k_0 = \frac{16}{41}\Omega = \frac{1600}{41} = 39,0 \\ &\Rightarrow\quad q_0 = 5\left(\frac{1600}{41}\right)^{\frac{4}{5}} = 93.765 \end{aligned}$$

Le taux d'intérêt d'équilibre au Tms de l'agent représentatif :

$$\frac{1}{1+r_1} = Tms_{0\to 1}^{AR} = \frac{4}{5}\frac{100-39.0}{93.765} \simeq .52045$$

et donc :

$$r_1 = \frac{1}{.52045} - 1 = .92141$$

(2) Le marché des fonds prêtables permettant d'actualiser les revenus futurs, la valeur boursière de l'entreprise est donc la valeur actualisée de ses dépenses et de ses recettes :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{1+r_1}q_1 - k_1 \\ &= .52045 \times 93.765 - 39.0 = 9.8 \end{aligned}$$

(3) Dans l'équation égalisant le Tms à l'inverse de la production (= Tmt),

$$\frac{4}{5}\frac{100-k_1}{\theta\,(k_1)^{\frac{4}{5}}} = \frac{(k_1)^{\frac{1}{5}}}{\frac{4}{5}\theta}$$

on remarque que la variable de productivité θ intervient des deux côtés avec la même intensité : lorsque la valeur de θ double, la valeur du Tms diminue de moitié comme celle du Tmt. Par conséquent, le niveau d'investissement assurant l'équilibre ne se modifie pas. Les chocs de productivité sont ici neutres pour l'investissement.

4.3 Eléments de correction de l'exercice 2

(1) En notant S_1^i, S_2^i les épargnes réalisées aux périodes 0, 1 pour obtenir des revenus supplémentaires aux périodes 1, 2, les contraintes budgétaires des différentes périodes sont :

$$\begin{aligned} \textit{période } 0 &: \; c_0^i + S_1 = \omega_0^i \\ \textit{période } 1 &: \; c_1^i + S_2 = \omega_1^i + (1+r_1)\,S_1 \\ \textit{période } 2 &: \; c_2^i = \omega_2^i + (1+r_2)\,S_2 \end{aligned}$$

En procédant à rebours, on peut exprimer les niveaux d'épargne en fonction des autres paramètres et substituer :

$$S_2 = \frac{c_2^i - \omega_2^i}{1+r_2}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{c_1^i - \omega_1^i + S_2}{1+r_1} \\ &= \frac{c_1^i - \omega_1^i}{1+r_1} + \frac{S_2}{1+r_1} \\ &= \frac{c_1^i - \omega_1^i}{1+r_1} + \frac{c_2^i - \omega_2^i}{(1+r_1)\,(1+r_2)} \end{aligned}$$

et donc en substituant dans la contrainte budgétaire de la période 0 on obtient :

$$c_0^i + \frac{c_1^i - \omega_1^i}{1+r_1} + \frac{c_2^i - \omega_2^i}{(1+r_1)\,(1+r_2)} = \omega_0^i$$

et donc en réarrangeant cette expression :

$$c_0^i + \frac{c_1^i}{1+r_1} + \frac{c_2^i}{(1+r_1)\,(1+r_2)} = \omega_0^i + \frac{\omega_1^i}{1+r_1} + \frac{\omega_2^i}{(1+r_1)\,(1+r_2)}$$

(2) En prenant le log de la fonction d'utilité de Vendredi :

$$U_v = (c_0^v)\,(c_1^v)^{\frac{4}{5}}\,(c_2^v)^{\frac{16}{25}}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \ln U_v &= \ln(c_0^v) + \frac{4}{5}\ln(c_1^v) + \frac{16}{25}\ln(c_2^v) \\ &= \ln(c_0^v) + 0.8\ln(c_1^v) + 0.64\ln(c_2^v) \end{aligned}$$

La fonction Ln étant une fonction croissante, la transformation de U_v par le log donne une nouvelle fonction qui représente toujours les préférences de Vendredi. Cette fonction est identique à celle de Robinson. Les Tms communs des deux agents sont :

$$Tms^i_{0\to1} = \frac{4}{5}\frac{c^i_0}{c^i_1}, \quad Tms^i_{0\to2} = \frac{16}{25}\frac{c^i_0}{c^i_2}$$

et sont donc homogènes de degré 0. A l'équilibre chaque agent égalise son Tms au prix effectif des consommations (dans la contrainte budgétaire intertertemporelle) et donc on aura :

$$Tms^r_{0\to1} = \frac{1}{1+r_1} = Tms^v_{0\to1}, \quad Tms^r_{0\to2} = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} = Tms^v_{0\to2}$$

et donc les Tms des agents sont égalisés. L'identité des fonctions d'utilité, l'homogénéité de degré 0 des Tms, l'égalisation de ceux-ci assure l'existence d'un agent représentatif dont les préférences sont les mêmes que celles de Vendredi et de Robinson. Par conséquent, à l'équilibre le Tms de l'agent représentatif est égalisé au prix effectif des consommations :

$$Tms^{AR}_{0\to1} = \frac{4}{5}\frac{c^{AR}_0}{c^{AR}_1} = \frac{1}{1+r_1}, \quad Tms^{AR}_{0\to2} = \frac{16}{25}\frac{c^{AR}_0}{c^{AR}_2} = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}$$

Comme nous sommes dans une économie d'échanges, les consommations de l'agent représentatif sont les quantités de bien disponibles. Comme :

$$\omega^r_0 = 750,\ \omega^r_1 = 400,\ \omega^r_2 = 800,\ \omega^v_0 = 250,\ \omega^v_1 = 800,\ \omega^v_2 = 640$$

on a donc :

$$Tms^{AR}_{0\to1} = \frac{4}{5}\frac{750+250}{400+800} = \frac{1}{1+r_1}$$

$$Tms^{AR}_{0\to2} = \frac{16}{25}\frac{750+250}{800+640} = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}$$

et donc :

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$$

(3) L'évaluation de l'obligation se fait par arbitrage. La connaissance des taux courts donnent immédiatement le prix des zéro-coupons β_1 et β_2 :

$$\beta_1 = \frac{1}{1+r_1} = \frac{2}{3},\ \beta_2 = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} = \frac{4}{9}$$

L'obligation classique rapporte r à la période 1, $1+r$ à la période 2, et donc la valeur actualisée :

$$\beta_1 r + \beta_2(1+r)$$

Pour obtenir ce revenu actualisé, on doit investir une unité et donc à l'équilibre le coupon r doit donc être tel que le coût (1) soit égal à la valeur actualisée :

$$1 = \beta_1 r + \beta_2(1+r) \Rightarrow r = 0.5$$

(4) Si Vendredi vend immédiatement l'arbre Vendredi obtiendra un prix q_0 sur le marché. S'il vend plus tard il aura la récolte de la période 1, ω^v_1, et le prix de la vente q_1. La valeur actualisée de cette seconde stratégie est :

$$\frac{\omega^v_1 + q_1}{1+r_1}$$

Mais les prix des actifs reflètent leurs valeurs actualisées ; par conséquent :

$$q_1 = \frac{\omega^v_2}{1+r_2}$$

et donc la valeur actualisée de la seconde est en fait :

$$\frac{\omega^v_1 + \frac{\omega^v_2}{1+r_2}}{1+r_1} = \frac{\omega^v_1}{1+r_1} + \frac{\omega^v_2}{(1+r_1)(1+r_2)}$$

Or ce dernier terme est la valeur actualisée. A l'équilibre elle est égale au prix q_1. Par conséquent, le timing des stratégies n'a aucune importance : le prix q_1 est toujours égale à la valeur actualisée de la dotation ω^v.

5 Partiel de février 2001

5.1 Intitulé

5.1.1 Cours (7 points)

Au choix, deux des trois questions suivantes :
(1) Aversion à l'égard du risque et prime de risque (3.5 points)
(2) En équilibre général, le partage des risques économiques conduit-il à leurs disparitions ? (3.5 points)
(3) Complétude et évaluation des actifs financiers. (3.5 points)

5.1.2 Exercice 1 (5 points)

[L'intitulé a été modifié pour supprimer les références aux marchés de zéro-coupons en équilibre général - désormais hors programme]

On considère une économie de production comportant trois périodes $t = 0, 1, 2$ dont Robinson (r) et Vendredi (v) sont les agents. A chaque période, il existe un unique bien qui peut être consommé ou utilisé comme facteur de production.

A la période 0, le secteur productif peut transformer le bien de la période 0 en bien de la période 1 en utilisant la technique résumée par la fonction de production suivante : $q_1 = 10\,(k_1)^{\frac{1}{2}}$, où k_1 est la quantité du bien de la *période 0* utilisée comme facteur de production par le secteur productif. A cette même période 0, le secteur productif peut aussi transformer le bien de la période 0 en bien de la période 2 en utilisant la technique résumée par la fonction de production suivante : $q_2 = 20\,(k_2)^{\frac{1}{2}}$, où k_2 est la quantité du bien de la *période 0* utilisée comme facteur de production par le secteur productif. Chaque agent possède la moitié de chaque entreprise.

Vendredi et Robinson héritent initialement (à la période 0 donc) des dotations suivantes : $\omega^r = 75$, $\omega^v = 25$. Les préférences des deux compères sont identiques et résumées par la fonction d'utilité :

$$U_i = \ln\left(c_0^i\right) + \alpha_1 \ln\left(c_1^i\right) + \alpha_2 \ln\left(c_2^i\right), i = v, r$$

avec : $\alpha_1 = 0.9$, $\alpha_2 = 0.7$.

Aux périodes 0 et 1 sont mis en place des marchés de fonds prêtables sur lequel les agents pevent prêter ou emprunter aux taux d'intérêt r_1 (pour la période 0) et r_2 (pour la période 1). L'épargne de la période 0 de chaque agent i est notée S_0^i, celle de la période 1 S_1^i. Les marchés sont tous supposés être en CPP.

(1) En exploitant l'existence d'un agent représentatif, écrire le système déterminant les quantités k_1 et k_2 d'équilibre. Calculer ces valeurs. (2 points)

(2) Déterminer les taux d'intérêt de l'économie, la valeur des entreprises. (2 points)

(3) En vous servant des relations obtenues à la question (1), déterminer l'impact qualitatif d'une hausse du paramètre α_2 sur les investissements, les taux d'actualisation. (1 point)

5.1.3 Exercice 2 (8 points)

L'économie comprend deux périodes $t = 0, 1$, trois états futurs du monde $s = 1, 2, 3$ dont les probabilités sont : $\pi(1) = 1/3$, $\pi(2) = 1/3$, $\pi(3) = 1/3$. Elle comprend deux agents : Robinson et Vendredi. Les préférences de ceux-ci sont identiques et représentées par la fonction :

$$U_i = \ln\left(c_0^i\right) + 0.9 \sum_{s=1}^{3} \pi(s) . \ln\left(c_s^i\right)$$

Les deux agents disposent de dotations non stockables à la période 0, $\omega^r(0) = 50$ et $\omega^v(0) = 150$. A la période 1, les biens futurs sont produits (sans aucun coût) par deux entreprises - respectivement "Vendredi & Co" et "Robinson & Co". Les quantités délivrées sont selon les états de nature :

	1	2	3
Vendredi & Co ($y_v(s)$)	0	50	100
Robinson & Co ($y_r(s)$)	300	150	50

Chaque entreprise livre à ses propriétaires leurs productions (proportionnellement aux parts possédées). Initialement, Vendredi possède la totalité de l'entreprise "Vendredi & Co", Robinson la totalité de "Robinson & Co". *Le bien de la première date sera toujours pris comme numéraire.*
Un système financier est mis en place, comprenant un marché sur lequel on peut prêter ou emprunter au taux

d'intérêt r, et un marché boursier. Sur ce dernier, sont cotées les deux entreprises. On note θ_r^i, θ_v^i les parts (finales) détenues par l'agent i, B^i le placement réalisé (en actif certain) par l'agent i à la première période, q_j la valeur boursière de l'entreprise j, avec $j = r,\ v$.

1. Montrer que le système financier est complet. (1 point)
2. Calculer la valeur boursière des deux entreprises, le taux d'intérêt d'équilibre. (2 points)
3. En utilisant la correspondance entre l'équilibre à la Arrow-Debreu et l'équilibre financier, déterminer les consommations d'équilibre des agents, puis leur portefeuille financier. (2 points)
4. L'entreprise r, en fait, décide de pratiquer une politique financière active et de faire jouer le levier d'endettement. En 0, elle s'endette donc pour un montant de 9. Ce montant est utilisé pour verser des dividendes en 0 à l'actionnaire initial, Robinson. Comment se modifient les prix d'équilibre q_r, q_v ? Pourquoi le taux d'intérêt demeure-t-il constant ? (1.5 points)
5. Démontrer qu'à l'équilibre les consommations de Robinson et Vendredi ne sont pas affectées, que les portefeuilles des agents ne font que s'ajuster pour conserver inchangées ces consommations. (1.5 points)

5.2 Eléments de correction de l'exercice I

(1) Il existe deux périodes et les agents peuvent utiliser deux marchés de fonds prêtables. Les marchés sont complets et donc à l'équilibre concurrentiel les agents égalisent leurs Tms au facteur d'actualisation :

$$Tms^i_{0\to 1} = \frac{1}{1+r_1},\ i = r, v$$

$$Tms^i_{0\to 2} = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)},\ i = r, v$$

Ceci assure l'égalisation des Tms entre eux :

$$Tms^r_{0\to 1} = Tms^v_{0\to 1},\ \beta_2 = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} = \frac{4}{9}$$

l'équilibre est donc Pareto-optimal.

Comme les agents ont des préférences identiques, que les Tms sont homogènes de degré 0 puisqu'il sont :

$$Tms^i_{0\to 1} = \alpha_1 \frac{c_0^i}{c_1^i},\ Tms^i_{0\to 2} = \alpha_2 \frac{c_0^i}{c_2^i}$$

que l'équilibre est Pareto optimal, il existe donc un agent représentatif dont la fonction d'utilité est la même que celles des agents.

Pour déterminer les niveaux d'investissement, il suffit donc d'exploiter l'existence de l'agent représentatif et l'optimalité de l'équilibre. A l'équilibre, pour chaque échance ($t = 1$ et $t = 2$)le Tms de l'agent représentatif est en effet égal au TMT des entreprises (= inverse de la productivité marginale du capital) :

$$Tms^{AR}_{0\to 1} := \alpha_1 \frac{c_0^{AR}}{c_1^{AR}} = \frac{k_1^{1-\gamma_1}}{\theta_1 \gamma_1} =: TMT_{0\to 1} \tag{1}$$

$$Tms^{AR}_{0\to 2} := \alpha_2 \frac{c_0^{AR}}{c_2^{AR}} = \frac{k_2^{1-\gamma_2}}{\theta_2 \gamma_2} =: TMT_{0\to 2} \tag{2}$$

La dotation initiale (Ω_0) se partage entre les investissements (k_1 et k_2) et la consommation de l'agent représentatif :

$$c_0^{AR} + k_1 + k_2 = \Omega_0 \tag{3}$$

et les consommations futures sont les quantités produites :

$$c_1^{AR} = q_1 = \theta_1 (k_1)^{\gamma_1},\ \ c_2^{AR} = q_2 = \theta_2 (k_2)^{\gamma_2} \tag{4}$$

Aussi, à l'équilibre le système suivant est vérifié :

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\Omega_0 - k_1 - k_2}{\theta_1 k_1^{\gamma_1}} = \frac{k_1^{1-\gamma_1}}{\theta_1 \gamma_1} \\ \alpha_2 \frac{\Omega_0 - k_1 - k_2}{\theta_2 k_2^{\gamma_2}} = \frac{k_2^{1-\gamma_2}}{\theta_2 \gamma_2} \end{cases}$$

En faisant le rapport des deux équations, on obtient la relation reliant les niveaux d'investissement :

$$\frac{k_2}{\gamma_2\alpha_2} = \frac{k_1}{\gamma_1\alpha_1}$$

ou encore numériquement :

$$\frac{k_2}{.5\times 0.7} = \frac{k_1}{.5\times 0.9} \Rightarrow k_2 = \frac{7}{9}k_1$$

Comme $\Omega_0 - k_1 - k_2 = c_0^{AR}$, la première équation du système nous donne également c_0^{AR} en fonction de k_1 :

$$\alpha_1 \frac{c_0^{AR}}{\theta_1 k_1^{\gamma_1}} = \frac{k_1^{1-\gamma_1}}{\theta_1\gamma_1} \Rightarrow c_0^{AR} = \frac{k_1}{\alpha_1\gamma_1}$$

En exprimant une variable en fonction de l'autre, après substitution, on obtient les niveaux d'investissement :

$$\left.\begin{array}{r} c_0^{AR} + k_1 + k_2 = \Omega_0 \\ k_2 = \frac{\gamma_2\alpha_2}{\gamma_1\alpha_1}k_1 \\ c_0^{AR} = \frac{\theta_1 k_1}{\alpha_1\gamma_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\theta_1 k_1}{\alpha_1\gamma_1} + k_1 + \frac{\gamma_2\alpha_2}{\gamma_1\alpha_1}k_1 = \Omega_0$$

et donc :

$$k_1 = \frac{\gamma_1\alpha_1}{1+\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2}\Omega_0$$

En utilisant les relations donnant k_2 et c_0^{AR} en fonction de k_1 on obtient :

$$k_2 = \frac{\gamma_2\alpha_2}{1+\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2}\Omega_0$$

$$c_0^{AR} = \frac{1}{1+\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2}\Omega_0$$

ou encore numériquement :

$$\gamma_1 = .5, \gamma_2 = .5, \alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 0.7, \theta_1 = 10, \theta_2 = 20, \Omega_0 = 100$$

$$k_1 = \frac{0.5\times 0.9}{1+0.5\times 0.9+0.5\times 0.7}\times 100$$

$$k_2 = \frac{0.5\times 0.7}{1+0.5\times 0.9+0.5\times 0.7}\times 100$$

$$c_0^{AR} = \frac{1}{1+0.5\times 0.9+0.5\times 0.7}\times 100$$

$$k_1 = 25, k_2 = 19.44,\ c_0^{AR} = 55.56$$

(2) Pour déterminer les prix des zéro-coupons, on peut utiliser soit les Tms soit les TMT. Si l'on utilise ces derniers, comme on sait que :

$$\frac{1}{1+r_1} = \frac{1}{\theta_1\gamma_1}(k_1)^{1-\gamma_1},\ \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} = \frac{1}{\theta_2\gamma_2}(k_2)^{1-\gamma_2} \tag{5}$$

Avec les valeurs numériques :

$$\gamma_1 = .5, \gamma_2 = .5, \alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 0.7, \theta_1 = 10, \theta_2 = 20, \Omega_0 = 100$$

$$k_1 = 25, k_2 = 19.44$$

on obtient :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{1.0} - 1 = 0.0 \\ r_2 &= \frac{1.0}{.44096} - 1 = 1.2678 \end{aligned}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{1+r_1}\theta_1 (k_1)^{\gamma_1} - k_1 = 25.0$$

$$\pi_2 = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}\theta_2 (k_2)^{\gamma_2} - k_2 = 19.445$$

(3) Une hausse de α_2 correspond à la situation où les agents accordent plus de valeurs aux consommations de la période 2. Aussi aux niveaux d'investissements initiaux, les Tms des agents deviennent supérieures aux TMT, $Tms^i_{0\to 2} > TMT$. Inversement, la valeur des biens présents diminue relativement aux biens de la période 2. Aussi, ceci, via les ajustements de prix, conduit à une baisse de la consommation initiale c_0 en contrepartie d'une hausse de k_2 (et donc de la production q_2 et des consommations c^i_2).

L'ajustement de la consommation c_0 a en effet également des répercussions sur l'investissement k_1 : la réduction de c_0 conduisant elle-aussi à une baisse de la valeur des biens de la période 1, i.e. du $Tms_{0\to 1}$ - après ajustement de c_0, $Tms_{0\to 1} < TMT$. Aussi, la hausse de α_2 se traduit par une baisse de k_1. Ces ajustements des quantités impliquent qu'après ces ajustements, le facteur d'actualisation des biens de la période 2, $1/(1+r_1)(1+r_2)$, est plus faible, celui des biens de la période 1, $1/1+r_1$, étant indéterminé.

5.3 Eléments de correction de l'exercice 2

(1) système financier complet :

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 300 & 1+r \\ 50 & 150 & 1+r \\ 100 & 50 & 1+r \end{bmatrix} = (1+r)\det\begin{bmatrix} 0 & 300 & 1 \\ 50 & 150 & 1 \\ 100 & 50 & 1 \end{bmatrix} = 2500 \neq 0$$

0 point si calcul avec seulement les deux actifs risqués

(2) barême proposé : 1 point pour les β, 1 point pour les autres valeurs

calcul des prix des états :

$$\beta_1 = 0.3\frac{c_0^{AR}}{c_1^{AR}} = 0.3\frac{200}{300} = 0.2$$

$$\beta_2 = 0.3\frac{c_0^{AR}}{c_2^{AR}} = 0.3\frac{200}{200} = 0.3$$

$$\beta_3 = 0.3\frac{c_0^{AR}}{c_2^{AR}} = 0.3\frac{200}{150} = 0.4$$

taux d'intérêt :

$$r = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

$$q_v = 0.2 \times 0 + 0.3 \times 50 + 0.4 \times 100 = 55.0$$

$$q_r = 0.2 \times 300 + 0.3 \times 150 + 0.4 \times 50 = 125.0$$

(3) consommations et portefeuilles

la richesse initiale des individus :

$$W_r = 50 + 125 = 175$$

$$W_v = 150 + 55 = 205$$

comme les fonctions d'utilité sont identiques et sont des Cobb-Douglas :

$$\frac{c_s^r}{c_s^v} = \frac{W_r}{W_v} \Rightarrow \frac{c_s^r}{c_s^v} = \frac{175}{205} = .85366 \Rightarrow c_s^v = \frac{1}{1.85366}\Omega_s$$

où Ω_s est la dotation dans l'état s. D'où :

	0	1	2	3
Ω_s	200	300	200	150
c_s^r	92.11	138.16	92.11	69.089
c_s^v	107.89	161.84	107.89	80.921

les portefeuilles d'équilibre sont ceux permettant d'atteindre les consommations :

$$i : \begin{cases} c_1^i = 0\theta_v^i + 300\theta_r^i + \frac{10}{9}B^i \\ c_2^i = 50\theta_v^i + 150\theta_r^i + \frac{10}{9}B^i \\ c_3^i = 100\theta_v^i + 50\theta_r^i + \frac{10}{9}B^i \end{cases}$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}138.16=0\theta_v^i+300\theta_r^i+\frac{10}{9}z\\ 92.11=50\theta_v^i+150\theta_r^i+\frac{10}{9}z\\ 69.089=100\theta_v^i+50\theta_r^i+\frac{10}{9}z\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\theta_v^i=.46074\\ \theta_r^i=.46058\\ B_i\simeq 0\end{array}\right.$$

$$v:\left\{\begin{array}{l}161.84=0\theta_v^i+300\theta_r^i+\frac{10}{9}B_i\\ 107.89=50\theta_v^i+150\theta_r^i+\frac{10}{9}B_i\\ 80.921=100\theta_v^i+50\theta_r^i+\frac{10}{9}B_i\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\theta_v^i=.53986\\ \theta_r^i=.53962\\ B_i\simeq 0\end{array}\right.$$

La politique financière ne modifie pas les quantités existantes de biens et donc pas les prix des états de l'économie. Elle modifie cependant les dividendes perçus par les actionnaires. Ceux-ci deviennent :

$$D_r=\begin{bmatrix}300\\150\\50\end{bmatrix}-\frac{10}{9}\begin{bmatrix}9\\9\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}290.0\\140.0\\40.0\end{bmatrix}$$

et donc la nouvelle valeur de D_r est :

$$q_r'=0.2\times 290+0.3\times 140+0.4\times 40=116.0$$

On vérifie que la valeur boursière du capital se réduit mais la valeur de l'entreprise demeure constante puisque l'endettement est de 9. Les données réelles n'étant pas modifiées, les consommations d'équilibre des agents demeurent inchangées :

$$r:\begin{array}{l}138.16=290\theta_r^i+\frac{10}{9}B^i\\ 92.11=50\theta_v^i+140\theta_r^i+\frac{10}{9}B^i\\ 69.089=100\theta_v^i+40\theta_r^i+\frac{10}{9}B^i\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}\theta_v^i=.460\\ \theta_r^i=.460\\ B^i=4.1326\end{array}$$

$$v:\begin{array}{l}161.84=290\theta_r^i+\frac{10}{9}B^i\\ 107.89=50\theta_v^i+140\theta_r^i+\frac{10}{9}B^i\\ 80.921=100\theta_v^i+40\theta_r^i+\frac{10}{9}B^i\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}\theta_v^i=.539\\ \theta_r^i=.539\\ B^i=4.8152\end{array}$$

6 Session de septembre 2001

6.1 Intitulé

6.1.1 Cours (6 points)

Au choix deux des questions suivantes :
(1) La concurrence pure et parfaite nécessite-t-elle nécessairement un nombre illimité de joueurs ? (3 points)
(2) L'évaluation par arbitrage des titres financiers. (3 points)
(3) Les effets d'un choc de productivité sur l'équilibre économique (3 points).

6.1.2 Exercice 1 (6 points)

On considère une économie comprenant deux périodes $t=0,1$ peuplée par un unique agent : Robinson. A chaque date, il existe un bien de consommation non stockable ; les préférences de l'unique agent sur ces biens sont résumées par la fonction d'utilité U :

$$U=\ln(c_0)+\frac{4}{5}\ln(c_1)$$

où c_t est la quantité du bien de la période t consommée. La dotation de l'agent à la première période ($t=0$) est $\Omega_0=100$, la dotation à la seconde période est Ω_1. Le bien de la période 1 peut également être produit à l'aide d'une technologie utilisant le bien de la période 0 comme facteur de production ; la technologie est résumée par la fonction de production :

$$q=\theta\sqrt{k},\ \theta>0,\ k\geq 0$$

La technologie est possédée par une entreprise dont Robinson est l'unique actionnaire. Le bien de consommation est pris comme numéraire à chaque date. Les agents peuvent échanger *à chaque période* les biens sur des marchés spots. A la date 0, est également mis en place un marché financier sur lequel les agents peuvent emprunter ou prêter au taux d'intérêt r.

1. En notant S l'épargne de Robinson, Π le profit *actualisé* de l'entreprise, donnez l'écriture des contraintes budgétaires de Robinson, de sa contrainte budgétaire intertemporelle, celle du profit *actualisé* de l'entreprise. (2 points)

2. Donnez les autres conditions caractérisant l'é quilibre : contraintes de ressources pour chaque bien, conditions marginales pour chaque agent (Robinson, l'entreprise). (2 points)
3. Déterminez l'investissement k et le taux d'intérêt r d'équilibre pour $\theta = 1$, $\Omega_1 = 0$. (2 points)
4. En utilisant vos réponses à la question 2, déterminez l'effet sur k d'une augmentation de θ et de Ω_1. (2 points)

6.1.3 Exercice 2 (8 points)

Une économie d'échange comporte :
- un seul bien non stockable (pris comme numéraire) ;
- deux dates ($t = 0, 1$) ;
- 2 consommateurs ($i = A, B$) vivant pendant les périodes considérées ;
- 3 états de la nature ($s = 1, 2, 3$), dont les probabilités objectives sont respectivement $\pi(1) = \frac{1}{4}$, $\pi(2) = \frac{1}{2}$, $\pi(3) = \frac{1}{4}$.

Les consommateurs ont la même fonction d'utilité de von Neumann, dont l'utilité élémentaire est :

$$u_i\left[c_i(0), c_i(s)\right] = \frac{c_i(0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta.\frac{c_i(s)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \text{ avec } \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{3}{4} \end{cases}$$

On note $\omega_i(0)$ la dotation initiale et $\omega_i(s)$ les dotations aléatoires attribuées au consommateur i dans l'état s - les quantités sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_A(0) &= 25,\ \omega_A(1) = 50,\ \omega_A(2) = 50,\ \omega_A(3) = 0 \\ \omega_B(0) &= 75,\ \omega_B(1) = 100,\ \omega_B(2) = 50,\ \omega_B(3) = 50 \end{aligned}$$

A la période 0, les agents peuvent vendre et acheter trois actifs financiers $j = 1, 2, 3$ dont les dividendes sont :

$$d_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix},\ d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix},\ d_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

et dont les prix sont notés q_1, q_2 et q_3. La demande *nette* de l'actif j ($j = 1, 2, 3$) de l'agent i ($i = A, B$) est notée z_j^i.

1. Donnez l'expression *des* contraintes budgétaires *des deux* agents. (2 points)
2. Après avoir démontré que le système des marchés financiers était complet, calculez la valeur des prix d'équilibre q_1, q_2, q_3 ainsi que le taux d'intérêt (= taux d'actualisation de l'économie) (On pourra notamment utiliser la méthode de l'agent représentatif) (4 points)
3. Déterminez les portefeuille d'équilibre des agents. (2 points)

6.2 Eléments de correction de l'exercice 1

Les contraintes budgétaires de Robinson :

$$\begin{cases} \textit{période } 0: & c_0 + S = \Omega_0 + \Pi \\ \textit{période } 1: & c_1 = \Omega_1 + (1+r)S \end{cases}$$

et donc, comme :

$$S = \frac{c_1 - \Omega_1}{1+r}$$

après substitution, la contrainte intertemporelle est :

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = \Omega_0 + \frac{\Omega_1}{1+r} + \Pi$$

Le profit de l'entreprise s'écrit lui :

$$\Pi = \frac{q}{1+r} - k$$

Les contraintes de ressources que l'on doit vérifier à l'équilibre sont celles portant sur les biens de la période 0 et 1 :

$$\begin{cases} \textit{période } 1: & c_0 + k = \Omega_0 \\ \textit{période } 2: & c_1 = \Omega_1 + q \end{cases}$$

Les conditions marginales est celle caractérisant les choix optimaux de consommation dans la contrainte budgétaire :

$$Tms_{0\to 1} = \frac{4}{5}\frac{c_0}{c_1} = \frac{1}{1+r}$$

ainsi que celle caractérisant l'investissement optimal pour l'entreprise :

$$\frac{\partial}{\partial k}q = \frac{\theta}{2\sqrt{k}} = 1 + r$$

ou encore :

$$TMT_{0\to 1} = -\frac{dk}{dq} = \frac{2\sqrt{k}}{\theta} = \frac{1}{1+r}$$

Une contrainte additionnelle (non demandée) est celle du marché financier :

$$S = k$$

où k est ici la valeur de l'endettement de l'entreprise (utilisée pour financer l'investissement).

Les conditions vérifiées à l'équilibre sont donc :

$$\left\{\begin{array}{lll}
Robinson & cond.\ m\arg. & Tms_{0\to 1} = \frac{1}{1+r} \\
 & cont.\ budgétaire & c_0 + \frac{c_1}{1+r} = \Omega_0 + \frac{\Omega_1}{1+r} + \Pi \\
 & & \\
Entreprise & cond.\ m\arg. & TMT_{0\to 1} = \frac{1}{1+r} \\
 & profit & \Pi = \frac{q}{1+r} - k \\
 & & \\
Equilibre & bien\ période\ 0 & c_0 + k = \Omega_0 \\
des & marché\ financier & S = k \\
marchés & bien\ période\ 1 & c_1 = q + \Omega_1 \\
 & & \\
liaison & & q = \theta\sqrt{k}
\end{array}\right.$$

L'équilibre impose donc l'égalisation du Tms de Robinson au TMT de l'entreprise :

$$\left\{\begin{array}{l} Tms_{0\to 1} = \frac{1}{1+r} \\ TMT_{0\to 1} = \frac{1}{1+r} \end{array}\right. \Rightarrow Tms_{0\to 1} = TMT_{0\to 1}$$

et donc après substitutions :

$$\frac{4}{5}\frac{100-k}{\Omega_1 + \theta\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{k}}{\theta}$$

Cette équation détermine implicite une variable endogène, l'investissement k, en fonction des paramètres de l'économie Ω_1 et θ.

Si : $\Omega_1 = 0$, $\theta = 1$, l'équation s'écrit alors simplement :

$$\begin{aligned} \frac{4}{5}\frac{100-k}{\sqrt{k}} &= 2\sqrt{k} \Rightarrow \frac{4}{5}(100-k) = 2k \\ &\Rightarrow k = \frac{400}{14} = \frac{200}{7} \simeq 28.57 \end{aligned}$$

Connaissant le stock de capital d'équilibre, le taux d'intérêt d'équilibre de l'économie peut être obtenu des conditions marginales :

$$Tms_{0\to 1} = \frac{4}{5}\frac{100 - \frac{200}{7}}{\sqrt{\frac{200}{7}}} = \frac{1}{1+r} \Rightarrow r = -.906$$

L'équation déterminant l'investissement :

$$Tms_{0\to 1} = \frac{4}{5}\frac{100-k}{\Omega_1 + \theta\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{k}}{\theta} = TMT_{0\to 1}$$

montre que :

– l'investissement est négativement affecté par un accroissement de la dotation future Ω_1 - plus la dotation future est importante, plus la valeur pour Robinson de la consommation future ($Tms_{0\to1}$) est faible et donc plus l'investissement souhaité est faible ;
– si la dotation future (Ω_1) est nulle, l'investissement n'est pas affecté par les chocs de productivité - un tel choc diminuant dans les mêmes proportions le Tms et le TMT ;
– si la dotation future est positive, le Tms diminue moins que le TMT et donc, comme la valeur de la consommation future devient plus grande que son coût, l'investissement augmente.

6.3 Eléments de correction de l'exercice 2

Si l'on note z_j^i la demande nette de l'actif j de l'agent i, et si l'on prend comme numéraire à chaque date-événement le bien de consommation, les contraintes budgétaires de cet agent i sont :

$$\left\{\begin{array}{l} c_0^i + \sum_{j=1,2,3} q_j.z_j^i = \omega_0^i \\ c_1^i = \omega_1^i + \sum_j d_j(1).z_j^i \\ c_2^i = \omega_2^i + \sum_j d_j(2).z_j^i \\ c_3^i = \omega_3^i + \sum_j d_j(3).z_j^i \end{array}\right.$$

Pour que le système financier soit complet, il faut (et il suffit) que les vecteurs des revenus livrés par les actifs soient linéairement indépendants. Mathématiquement, ceci revient à s'assurer que le déterminant de la matrice des revenus :

$$d = \left[\begin{array}{lll} 10 & 0 & 10 \\ 0 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 10 \end{array}\right]$$

est non nul. On constate que ceci est bien le cas :

$$\begin{aligned} \det d &= 10 \times 20 \times 10 + 0 + 0 - 10 \times 20 \times 20 - 10 \times 10 \times 10 - 0 \\ &= -3000 \neq 0 \end{aligned}$$

Le marché étant complet, il existe un système de prix d'états uniques dont les valeurs sont celles qu'auraient à l'équilibre les prix des actifs à la Arrow-Debreu. Pour les déterminer, on exploite l'existence pour notre économie d'un agent représentatif puisque les préférences sont identiques et les Tms homogènes. L'utilité espérée s'écrivant :

$$\mathbf{E}[u_i\left[c_i\left(0\right), c_i\left(s\right)\right]] = \frac{c_i\left(0\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta.\sum_s \pi_s \left(\frac{c_i\left(s\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

le Tms de l'agent i est en effet :

$$Tms_{0\to s}^i = \beta\pi_s \left[\frac{c_i(0)}{c_i(s)}\right]^\gamma$$

Dans une telle économie d'échanges, avec l'existence d'un agent représentatif, les valeurs des actifs à la Arrow-Debreu sont données par celles des Tms de l'agent représentatif évalués au point de dotation :

$$\beta_s = Tms_{0\to s}^{AR} = \beta\pi_s \left[\frac{\Omega(0)}{\Omega(s)}\right]^\gamma \tag{6}$$

Avec les valeurs numériques :

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_1 = \frac{3}{4}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{100}{150}} = .153 \\ \beta_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{100}{100}} = .375 \\ \beta_3 = \frac{3}{4}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{100}{50}} = .265 \end{array}\right.$$

Le taux d'intérêt de l'économie est donc donnée par la relation d'arbitrage :

$$\sum_s \beta_s = \frac{1}{1+r} \Rightarrow r = \frac{1}{\sum_s \beta_s} - 1 = \frac{1}{.153 + .375 + .265} - 1 \approx .261$$

Les valeur des trois actifs sont données par les relations de valorisation :

$$q_j = \sum_s \beta_s.d_j(s)$$

Numériquement :

$$\begin{aligned} q_1 &= .153\,(10) + .375\,(0) + .265\,(20) = 6.83 \\ q_2 &= .153\,(0) + .375\,(20) + .265\,(10) = 10.15 \\ q_3 &= .153\,(10) + .375\,(10) + .265\,(10) = 7.93 \end{aligned}$$

Pour déterminer les portefeuilles, on peut également utiliser l'équivalence entre l'équilibre à la Arrow-Debreu et l'équilibre avec marchés financiers (complets). En effet, les consommations étant identiques aux deux équilibres, lorsque l'on connaît les consommations $\left(c_1^i, c_2^i, c_3^i\right)$, on peut déterminer les portefeuilles $z^i = \left(z_1^i, z_2^i, z_3^i\right)$ en cherchant les solutions du système formé par les contraintes budgétaires futures :

$$\begin{cases} c_1^i = \omega_1^i + \sum_j d_j(1).z_j^i \\ c_2^i = \omega_2^i + \sum_j d_j(2).z_j^i \\ c_3^i = \omega_3^i + \sum_j d_j(3).z_j^i \end{cases}$$

Pour déterminer les consommations à l'équilibre, on remarque que les conditions marginales $Tms_{0\to s}^i = \beta_s$ donnent des relations linéaires entre les consommations :

$$\beta_s = \beta\pi_s \left[\frac{c_i(0)}{c_i(s)}\right]^\gamma \Rightarrow c_i(s) = c_i(0)\left[\frac{\beta_s}{\beta\pi_s}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

et donc comme la contrainte budgétaire consolidée est :

$$c_i(0) + \sum_s \beta_s c_i(s) = \omega_i(0) + \sum_s \beta_s \omega_i(s)$$

les demandes sont linéaires par rapport à la richesse $\omega_i(0) + \sum_s \beta_s \omega_i(s)$:

$$c_i(0) + \sum_s \beta_s \left[c_i(0)\left[\frac{\beta_s}{\beta\pi_s}\right]^{\frac{1}{\gamma}}\right] = \omega_i(0) + \sum_s \beta_s \omega_i(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad c_i(0) &= \frac{1}{1 + \sum_s \beta_s \left[\frac{\beta_s}{\beta\pi_s}\right]^{\frac{1}{\gamma}}} \times \left[\omega_i(0) + \sum_s \beta_s \omega_i(s)\right] \\ \Rightarrow \quad c_i(s) &= \frac{\left[\frac{\beta_s}{\beta\pi_s}\right]^{\frac{1}{\gamma}}}{1 + \sum_s \beta_s \left[\frac{\beta_s}{\beta\pi_s}\right]^{\frac{1}{\gamma}}} \times \left[\omega_i(0) + \sum_s \beta_s \omega_i(s)\right] \end{aligned}$$

Cette linéarité identique des fonctions de demande par rapport à la richesse implique qu'à l'équilibre leurs consommations sont proportionnelles à la part de leurs richesses dans la richesse totale :

$$c_A(s) = \frac{W_A}{W_B + W_A}.\Omega_s$$

où Ω_s est la dotation de l'économie dans la date-événement s - $s = 0, 1, 2, 3$.

Les richesses des deux agents étant :

$$\begin{cases} W_A = 25 + .153 \times 50 + .375 \times 50 + .265 \times 0 = 51.4 \\ W_B = 75 + .153 \times 100 + .375 \times 50 + .265 \times 50 = 122.3 \end{cases}$$

les consommations de l'agent A et celles de l'agent B (obtenues par différence) sont :

$$\begin{cases} c_A(0) = \frac{51.4}{51.4+122.3} \times 100 = 29.59 \\ c_A(1) = \frac{51.4}{51.4+122.3} \times 150 = 44.39 \\ c_A(2) = \frac{51.4}{51.4+122.3} \times 100 = 29.59 \\ c_A(3) = \frac{51.4}{51.4+122.3} \times 50 = 14.80 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_B(0) = 100 - 29.59 = 70.41 \\ c_B(1) = 150 - 44.39 = 105.61 \\ c_B(2) = 100 - 29.59 = 70.41 \\ c_B(3) = 50 - 14.80 = 35.20 \end{cases}$$

Le portefeuille de l'agent A est donc la solution du système suivant :

$$\begin{cases} 44.39 = 50 + 10z_1 + 10z_3 \\ 29.59 = 50 + 20z_2 + 10z_3 \\ 14.80 = 0 + 20z_1 + 10z_2 + 10z_3 \end{cases}$$

et celui de l'agent B la solution de celui-ci :

$$\begin{cases} 105.61 = 100 + 10z_1 + 10z_3 \\ 70.41 = 50 + 20z_2 + 10z_3 \\ 35.20 = 50 + 20z_1 + 10z_2 + 10z_3 \end{cases}$$

Les solutions sont évidemment de signes opposées :

$$z_1^A = 1.854,\ z_2^A = .187,\ z_3^A = -2.415$$

$$z_1^B = -1.854,\ z_2^B = -.187,\ z_3^B = 2.415$$

puisque les titres que l'agent A achète lui sont nécessairement vendus par B.

7 Contrôle continu décembre 2001

7.1 Intitulé

7.1.1 Cours (6 points)

Au choix deux des trois sujets suivants :
(3) Synthèse et évaluation par arbitrage des actifs financiers. (3 points)

7.1.2 Exercice 2 (7 points)

On considère une économie d'échanges comprenant quatre périodes $t = 0, 1, 2, 3$, un unique bien de consommation à chaque période.

(1) A la période 0, des marchés financiers sont ouverts sur lesquels sont échangés des obligations classiques couvrant toutes les échéances. Les taux d'intérêt (coupons) des obligations sont les suivants :

obligation	échéance		
	période 1	période 2	période 3
taux d'intérêt	12.5%	63.63%	67.49%

Après avoir rappelé les caractéristiques de ces obligations (coût et flux de revenus futurs), déterminez par arbitrage la valeur des prix des zéro-coupons : β_1, β_2, β_3, à partir des taux d'intérêt des obligations. (3 points)

(2) L'économie, dont est tirée la précédente structure à terme des taux d'intérêt, est en fait peuplée de deux agents Robinson (r) et Vendredi (v). Les préférences des deux agents sont identiques et résumées par la fonction d'utilité commune :

$$U_i = -\frac{1}{c_0^i} - \frac{98}{100}\frac{1}{c_1^i} - \frac{81}{100}\frac{1}{c_2^i} - \frac{1}{2}\frac{1}{c_3^i}$$

Leurs dotations sont les suivantes :

	période 0	période 1	période 2	période 3
Robinson	1000	0	0	0
Vendredi	0	1050	1200	1250

Vendredi décide de créer sa propre société anonyme, *Vendredi SA*, et donc de créer une action dont les revenus seront les dotations futures de Vendredi. Le vecteur des revenus de cette action est donc :

$$V = \begin{bmatrix} 1050 \\ 1200 \\ 1250 \end{bmatrix}$$

Evaluez la valeur de cette action. (1 point)

(3) En fait, on apprend juste avant l'ouverture des marchés que *Vendredi SA* ne dégagera pas à la période un dividende de 1250 mais de 1350. Calculez la nouvelle valeur boursière de cette entreprise. (1 point) Pourquoi l'anticipation d'une augmentation future des profits constitue-t-elle une mauvaise nouvelle pour la bourse, i.e. pourquoi s'ajuste-t-elle à la baisse ? (2 points)

7.2 Eléments de correction

7.2.1 Exercice 2

La structure par termes des taux d'intérêt des obligations est supposée être :

obligation	échéance		
	période 1	période 2	période 3
taux d'intérêt	12.5%	63.63%	67.49%

Les obligations étant des actifs qui rapporte à chaque période future le coupon, i.e. pour une de fond de 1, les revenus des trois obligations sont :

obligations	période 1	période 2	période 3
échéance = période 1	1.125	0	0
échéance = période 2	0.6363	1.6363	0
échéance = période 3	0.6749	0.6749	1.6749

La synthèse de ces trois obligations par les zéro-coupons donnent trois portefeuilles dont les coûts sont nécessairement égaux à 1 (absence de profit d'arbitrage).

$$\begin{cases} \beta_1(1+R^1)=1 \\ \beta_1 R^2+\beta_2\left(1+R^2\right)=1 \\ \beta_1 R^3+\beta_2 R^3+\beta_3\left(1+R^3\right)=1 \end{cases}$$

et donc les betas par la structure par terme est :

$$\beta_1=.889,\ \beta_2=.265,\ \beta_3=.132$$

Les préférences des deux agents :

$$U_i=-\frac{1}{c_0^i}-\frac{98}{100}\frac{1}{c_1^i}-\frac{81}{100}\frac{1}{c_2^i}-\frac{1}{2}\frac{1}{c_3^i}$$

Leurs dotations sont les suivantes :

	période 0	période 1	période 2	période 3
Robinson	1000	0	0	0
Vendredi	0	1050	1200	1250

Les betas que l'on obtient avec l'agent représentatif sont :

$$\beta_1=\frac{98}{100}\left(\frac{1000}{1050}\right)^2=\frac{8}{9}\simeq .889$$
$$\beta_2=\frac{81}{100}\left(\frac{1000}{1200}\right)^2=\frac{9}{16}\simeq .5625$$
$$\beta_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1000}{1250}\right)^2=\frac{8}{25}\simeq .32$$

Aussi, les valeurs possibles de l'entreprise selon les betas utilisés sont :

	β_1	β_2	β_3	valeur de l'action
structure par terme	$.889$	$.265$	$.132$	1416.45
équilibre	$.889$	$.5625$	$.32$	2008.33

Le choc sur la dotation future (1350 et non 1250) modifie la valeur d'équilibre de β_3 :

$$\beta_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1000}{1350}\right)^2=\frac{200}{729}=27.43\%$$

Aussi, les valeurs de l'entreprise sont selon les betas utilisés :

	β_1	β_2	β_3	valeur de l'action
structure par terme	$.889$	$.265$	0.274	1621.70
équilibre	$.889$	$.5625$	$.0.274$	1978.70

8 Partiel de février 2002

8.1 Intitulé

8.1.1 Cours (6 points)

Au choix, deux des trois questions suivantes :

(1) L'équilibre général dans l'incertain avec actifs financiers est-il nécessairement optimal au sens de Pareto (3 points)

(2) Le critère d'espérance des gains est-il un bon critère de décision dans l'incertain ? (3 points)

(3) L'aversion au risque conduit-elle nécessairement à l'assurance complète ? (3 points)

8.1.2 Exercice 1 (3 points)

On considère deux actifs 1 et 2 dont les revenus sont $d_1 = \left[\ 3\ ;\quad 3\ \right]^T$ et $d_2 = \left[\ 5\ ;\quad 2\ \right]^T$, le prix de l'actif 1 est $q_1 = 2$.

(1) $q_2 = 3$, $q_2 = 4$ peuvent-ils être des prix d'équilibre du second actif ? (2 pts)

(2) En prenant $q_2 = 3$, évaluer l'actif dont les revenus sont $d_4 = \left[\ 4\ ;\quad 1\ \right]^T$. (1 pt)

8.1.3 Exercice 2 (11 points)

[L'intitulé a été modifié pour supprimer les références aux marchés de zéro-coupons en équilibre général - désormais hors programme]

On considère une économie d'échanges comportant deux agents (Robinson (r) et Vendredi (v)), deux périodes $t = 0, 1$, un unique bien de consommation (périssable). Les dotations des deux agents aux différentes périodes sont :

dotations	période 0	période 1
Robinson	50	100
Vendredi	100	50

et leurs préférences sont résumées par la fonction d'utilité suivante :

$$U_i = \ln\left(c_0^i\right) + \ln\left(c_1^i\right) \tag{7}$$

(1) Pour réallouer leurs ressources, les deux agents mettent en place un marché de fonds prêtables sur lesquel ils peuvent prêter ou emprunter pour une période au taux d'intérêt r_1.

(1-i) Spécifier la contrainte budgétaire intertemporelle des agents. Donner leurs programmes. (1 pt)

(1-ii) Calculer le taux d'intérêt d'équilibre. (1 pt)

(2) En fait, les dotations futures de Vendredi ne sont pas certaines. De plus, les quantités que recevra Vendredi se répartissent entre des dotations et des quantités que lui livre son entreprise *Vendredi & Co* dont il est initialement propriétaire à 100%.

L'incertitude est résumée par la donnée de trois états du monde $s = 1, 2, 3$, dont les probabilités sont $\pi_1 = 1/4$, $\pi_2 = 1/2$, $\pi_3 = 1/4$. Les préférences des agents sont désormais définies sur la consommation de la première période (c_0^i) et sur les consommations de seconde période dans les différents états du monde possible ($c_1^i(1)$, $c_1^i(2)$, $c_1^i(3)$). L'extension des préférences à l'incertain nous donne l'utilité espérée suivante :

$$U_i = \ln\left(c_0^i\right) + \frac{1}{4}\ln\left(c_1^i(1)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(c_1^i(2)\right) + \frac{1}{4}\ln\left(c_1^i(3)\right)$$

Les dotations reçues directement par les actions et la production de *Vendredi & Co.* sont :

	période 0	période 1		
	s=0	s=1	s=2	s=3
dotations de Robinson	50	100	100	100
dotations de Vendredi	100	20	20	0
production de Vendredi & Co.	0	0	30	80

Par rapport à l'économie précédente, les ressources futures des deux agents ont donc les mêmes valeurs moyennes (i.e. 100 et 50).

Pour réallouer les biens, les deux agents décident de généraliser le système de marchés à terme en mettant en place un système de marchés de biens contingents à la Arrow-Debreu.

(2-i) Déterminer la contrainte budgétaire consolidée des agents. Spécifier le programme des deux agents. (1 pt)

(2-ii) Calculer le ou les prix d'équilibre. Evaluer le taux d'actualisation d'équilibre. (2 pts)

(2-iii) En comparant cet équilibre à la Arrow - Debreu et l'équilibre avec marchés à terme (sans incertitude), quel est l'impact de l'incertitude sur le taux d'intérêt ? Expliquer l'évolution observée. (1 pt)

(3) La mise en place d'un système de marchés à la Arrow - Debreu est en fait prohibitive. Aussi, les agents se contentent de mettre en place un marché de fonds prêtables et un marché où est cotée l'entreprise *Vendredi & Co*. Sur le marché des fonds prêtables, chaque agent peut prêter ou emprunter au taux d'intérêt r. On note B^i le montant prêté par l'agent i ($i = r, v$) et naturellement à l'équilibre $B^r + B^v = 0$. Sur le marché de l'action, on peut acheter et vendre un titre dont le prix est noté q et dont les revenus futurs sont évidemment $d_v = \begin{bmatrix} 0 ; & 30 ; & 80 \end{bmatrix}^T$. Initialement Vendredi est propriétaire à 100% (= 1) de son entreprise. Chaque agent i ($i = r, v$) détermine la part qu'il souhaite détenir de l'entreprise et on note θ^i la part détenue à l'équilibre. Evidemment $\theta^r + \theta^v = 1$.

(3-i) Ecrire les contraintes budgétaires des deux agents, exprimer les consommations (c_0^i, $c_1^i(1)$, $c_1^i(2)$, c_1^i, (3)) des deux agents en fonction des choix de portefeuille (B^i, θ^i). Rappeler les conditions sur r et q que l'on doit vérifier à l'équilibre ainsi que les conditions d'équilibre sur les marchés. (2 pts)

(3-ii) On propose comme prix : $q = 31.687, r = -2.1076 \times 10^{-2}$, comme portefeuilles : $\theta^r = 0.38737, B^r = -38.351$, $\theta^v = 0.61263$, $B^v = 38.351$. Ces prix et ces choix constituent-ils un équilibre ? (2 pts)

(3-iv) Les consommations définies par ces variables sont-elles des consommations optimales au sens de Pareto ? (1 pt)

8.2 Eléments de correction

8.2.1 Exercice sur l'évaluation

(1) Pour tout prix d'équilibre q, il existe trois prix β_1, β_2 vérifiant les équations de valorisation. Par conséquent si $q_1 = 2$, $q_2 = 4$ sont des prix d'équilibre, ils vérifient :

$$\begin{cases} 2 = 3\beta_1 + 3\beta_2 \\ 4 = 5\beta_1 + 2\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = .9,\ \beta_2 = -.22$$

Comme β_2 est négatif, les prix proposés ne peuvent être des prix d'équilibre.

Par contre, si $q_2 = 3$, alors :

$$\begin{cases} 2 = 3\beta_1 + 3\beta_2 \\ 3 = 5\beta_1 + 2\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = .55,\ \beta_2 = .11$$

Comme les deux prix d'état sont positifs, les prix proposés pour les deux actifs peuvent être des prix d'équilibre.

(2) Si l'on admet comme prix d'équilibre $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, alors les prix des états sont $\beta_1 = .55$, $\beta_2 = .11$. Par conséquent, tout actif supplémentaire doit être évalué à l'aide de ceux-ci. Par conséquent, le seul prix q_3 cohérent avec les deux premiers sont :

$$q_3 = .555 \times 4 + .111 \times 1 = 2.331$$

8.2.2 Exercice sur l'équilibre général

1. Equilibre intertemporel

La contrainte budgétaire en 0 est alors :

$$c_0^i + S_0^i = \omega_0^i$$

et celle de la période 1 :

$$c_1^i = \omega_1^i + (1 + r_1)S_0^i$$

Comme la dernière contrainte nous donne l'épargne nécessaire en fonction de la consommation désirée et du taux d'intérêt :

$$S_0^i = \frac{c_1^i - \omega_1^i}{1 + r_1}$$

la contrainte budgétaire intertemporelle est donc obtenue en substituant à S_0^i son expression dans la contrainte budgétaire de la période 0 :

$$\begin{aligned} c_0^i + S_0^i &= \omega_0^i \Rightarrow c_0^i + \frac{c_1^i - \omega_1^i}{1 + r_1} = \omega_0^i \\ &\Rightarrow c_0^i + \frac{c_1^i}{1 + r_1} = \omega_0^i + \frac{\omega_1^i}{1 + r_1} \end{aligned}$$

Pour chaque agent i, ses demandes sont les solutions du programme :

$$\left\{\begin{array}{l} \max_{c_0^i,c_1^i} U_i(c_0^i,c_1^i) := \ln\left(c_0^i\right)+\ln\left(c_1^i\right) \\ \textit{sous la contrainte} : \\ c_0^i+\frac{c_1^i}{1+r_1}=\omega_0^i+\frac{\omega_1^i}{1+r_1} \end{array}\right. \tag{8}$$

avec l'épargne optimal donné par :

$$S_0^i=\frac{c_1^i-\omega_1^i}{1+r_1}$$

Les conditions suffisantes de ce programme sont :

$$\left\{\begin{array}{l} Tms_{0\to 1}^i=\frac{1}{1+r_1} \\ c_0^i+\frac{1}{1+r_1}c_1^i=\omega_0^i+\frac{1}{1+r_1}\omega_1^i \end{array}\right. \tag{9}$$

Comme :

$$Tms_{0\to 1}^i=\frac{c_0^i}{c_1^i} \tag{10}$$

le facteur d'actualisation d'équilibre $(1/1+r_1)$ est égal au Tms de l'agent représentatif :

$$\frac{1}{1+r_1}=Tms_{0\to 1}^{AR}(150,150)=\frac{150}{150}=1 \tag{11}$$

et donc le taux d'intérêt d'équilibre de l'économie est nul :

$$r_1=0 \tag{12}$$

2. Arrow - Debreu

Pour améliorer leurs situations, Vendredi et Robinson décident de mettre en place un système complet de contrats contingents à la Arrow-Debreu. Avec ce système, et notant les prix des contrats contingents β_1, β_2, β_3, le programme de Robinson est :

$$\left\{\begin{array}{l} \max_{c_0^r,c_1^r,c_2^r,c_3^r} U_i(c_0^r,c_1^r,c_2^r,c_3^r) := \ln\left(c_0^r\right)+\frac{2}{5}\ln\left(c_1^r\right)+\frac{1}{5}\ln\left(c_2^r\right)+\frac{2}{5}\ln\left(c_3^r\right) \\ \textit{sous la contrainte} : \\ c_0^r+\beta_1c_1^r+\beta_2c_2^r+\beta_3c_3^r=50+100\left[\beta_1+\beta_2+\beta_3\right] \end{array}\right. \tag{13}$$

tandis que celui de Vendredi est :

$$\left\{\begin{array}{l} \max_{c_0^v,c_1^v,c_2^v,c_3^v} U_i(c_0^v,c_1^v,c_2^v,c_3^v) := \ln\left(c_0^v\right)+\frac{2}{5}\ln\left(c_1^v\right)+\frac{1}{5}\ln\left(c_2^v\right)+\frac{2}{5}\ln\left(c_3^v\right) \\ \textit{sous la contrainte} : \\ c_0^v+\beta_1c_1^v+\beta_2c_2^v+\beta_3c_3^v=100+20\beta_1+\beta_2\left(20+30\right)+\beta_3\left(0+80\right) \end{array}\right. \tag{14}$$

Les conditions suffisantes de ce programme sont :

$$\left\{\begin{array}{l} Tms_{0\to 1}^i=\beta_1 \\ Tms_{0\to 2}^i=\beta_2 \\ Tms_{0\to 3}^i=\beta_3 \\ c_0^i+\beta_1c_1^i+\beta_2c_2^i+\beta_3c_3^i=\omega_0^i+\beta_1\omega_1^i+\beta_2\omega_2^i+\beta_3\omega_3^i \end{array}\right. \tag{15}$$

Comme les préférences sont identiques, que les Tms sont homogènes de degré 0 et que le marché assure l'optimalité des allocations finale (égalisation des Tms), il existe un agent représentatif dont les préférences sont les préférences communes des deux agents, dont les consommations (notées c_0^{AR} et c_1^{AR}) sont les consommations globales, i.e. ici les dotations :

$$\left\{\begin{array}{l} c_0^{AR}=c_0^r+c_0^v=150 \\ c_1^{AR}=c_1^r+c_1^v=100 \\ c_2^{AR}=c_2^r+c_2^v=150 \\ c_3^{AR}=c_3^r+c_3^v=200 \end{array}\right. \tag{16}$$

Les prix sont déterminés par les Tms de l'agent représentatif :

$$\beta_1 = Tms_{0\to 1}^{AR}(150,120,150,180)=\frac{1}{4}\frac{150}{120}=\frac{5}{16} \tag{17}$$

$$\beta_2 = Tms_{0\to 2}^{AR}(150,120,150,180)=\frac{1}{2}\frac{150}{150}=\frac{1}{2} \tag{18}$$

$$\beta_3 = Tms_{0\to 3}^{AR}(150,120,150,180)=\frac{1}{4}\frac{150}{180}=\frac{5}{24} \tag{19}$$

Le taux d'actualisation (= taux d'intérêt) et les prix d'équilibre des deux autres titres sont obtenus par arbitrage :

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=\frac{5}{16}+\frac{1}{2}+\frac{5}{24}=\frac{49}{48}$$
$$\frac{1}{1+r}=\beta_1+\beta_2+\beta_3 \Rightarrow r=\frac{1}{\beta_1+\beta_2+\beta_3}-1=-\frac{1}{49}=-2.0408\times 10^{-2} \tag{20}$$
$$r=-\frac{1}{49},\ v=\frac{95}{3},\ q=\frac{35}{2}$$

3. Equilibre avec marchés incomplets

Pour Robinson, sa contrainte budgétaire en 0 est donc :

$$c_0^r+B^r+v\theta^r=\omega_0^r \tag{21}$$

alors que celle de Vendredi s'écrit :

$$c_0^v+B^v+v\theta^v=\omega_0^v+v$$

Les consommations aux périodes futures sont données par les liaisons suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} c_1^i=\omega_1^i+d_v(1)\theta^i+(1+r)B^i \\ c_2^i=\omega_2^i+d_v(3)\theta^i+(1+r)B^i \\ c_3^i=\omega_3^i+d_v(3)\theta^i+(1+r)B^i \end{array}\right. \tag{22}$$

Le choix de portefeuille $\left(\theta^i,B^i\right)$ de l'agent i n'est optimal que s'il vérifie ses contraintes ainsi que les conditions marginales :

$$\left\{\begin{array}{l} v=Tms_{0\to1}^i\left(c^i\right)\times d_v(1)+Tms_{0\to2}^i\left(c^i\right)\times d_v(2)+Tms_{0\to3}^i\left(c^i\right)\times d_v(3) \\ 1=Tms_{0\to1}^i\left(c^i\right)\times(1+r)+Tms_{0\to2}^i\left(c^i\right)\times(1+r)+Tms_{0\to3}^i\left(c^i\right)\times(1+r) \end{array}\right. \tag{23}$$

L'équilibre général est atteint lorsque les choix de portefeuilles sont optimaux et lorsqu'ils équilibrent les trois marchés :

$$\left\{\begin{array}{l} \theta^r+\theta^v=1 \\ B^r+B^v=0 \end{array}\right. \tag{24}$$

Les marchés financiers sont naturellement incomplets puisque l'on a seulement deux actifs pour tois états du monde. On propose comme équilibre les prix :

$$v=31.687, r=-2.1076\times 10^{-2}$$

et les portefeuilles :

$$\begin{aligned} \theta^r &= .38737, B^r=-38.351 \\ \theta^r &= -.38737, B^r=38.351 \end{aligned}$$

Pour que cette solution constitue un équilibre il est nécessaire et suffisant qu'il donne des consommations positives :

$$\begin{bmatrix} c_0^r \\ c_1^r \\ c_2^r \\ c_3^r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 76.076 \\ 62.457 \\ 74.078 \\ 93.447 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} c_0^v \\ c_1^v \\ c_2^v \\ c_3^v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 73.924 \\ 57.543 \\ 75.922 \\ 86.553 \end{bmatrix}$$

assure l'équilibre des marchés financiers :

$$\left\{\begin{array}{l} \theta^r+\theta^v=0 \\ B^r+B^v=0 \end{array}\right. \tag{25}$$

et vérifie les conditions d'optimalité des choix de portefeuille :

$$\left\{\begin{array}{l} q=Tms_{0\to1}^i\left(c^i\right)\times d_v(1)+Tms_{0\to2}^i\left(c^i\right)\times d_v(2)+Tms_{0\to3}^i\left(c^i\right)\times d_v(3) \\ 1=Tms_{0\to1}^i\left(c^i\right)\times(1+r)+Tms_{0\to2}^i\left(c^i\right)\times(1+r)+Tms_{0\to3}^i\left(c^i\right)\times(1+r) \end{array}\right. \tag{26}$$

Or, comme les calculs assurent que :

$$\begin{bmatrix} Tms_{0\to1}^r \\ Tms_{0\to2}^r \\ Tms_{0\to3}^r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} .30451 \\ .51349 \\ .20353 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} Tms_{0\to1}^v \\ Tms_{0\to2}^v \\ Tms_{0\to3}^v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} .32117 \\ .48684 \\ .21352 \end{bmatrix}$$

on vérifie bien que pour chaque agent les valeurs des revenus futurs évaluée par les Tms sont égales aux prix :

$$Robinson : \begin{bmatrix} .30451 \\ .51349 \\ .20353 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1-2.1076\times10^{-2} & 0 \\ 1-2.1076\times10^{-2} & 30 \\ 1-2.1076\times10^{-2} & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 31.687 \end{bmatrix} = (1, v) \tag{27}$$

$$Vendredi : \begin{bmatrix} .32117 \\ .48684 \\ .21352 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1-2.1076\times10^{-2} & 0 \\ 1-2.1076\times10^{-2} & 30 \\ 1-2.1076\times10^{-2} & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 31.687 \end{bmatrix} = (1, v) \tag{28}$$

Les prix et les portefeuilles constituent donc bien un équilibre.

Cependant cet équilibre n'est pas efficace puisque les Tms sont égaux : il existe donc des échanges mutuelles avantageux qui ne sont pas réalisés.

9 Session de septembre 2002

9.1 Intitulé

9.1.1 Cours (6 points)

Au choix, une des deux questions suivantes :

(1) Les marchés de biens contingents à la Arrow - Debreu (principes, propriétés de l"équilibre, intérêt pour la finance et l'économie) (6 points)

(2) L'aversion au risque (définition, modélisation et conséquences pour le partage des risques) (6 points)

9.1.2 Exercice I (7 points)

Un entrepreneur peut investir dans deux projets *sans risque*. L'un suppose un investissement initial de 100 et engendre un revenu de 40 une période plus tard, de 70 trois périodes plus tard. L'autre suppose un investissement initial de 50 et engendre un revenu de 70 deux périodes plus tard.

(1) Quelle méthode doit suivre l'entrepreneur pour évaluer l'intérêt de ces investissements. (1.5 pts)

(2) Pour appliquer cette méthode, l'entrepreneur observe la structure par termes des taux d'intérêt des **obligations**. Les taux d'intérêt des obligations (émises à la période de l'investissement) sont de 10%, 5% et 10% pour les obligations **d'échéance** 1 an, deux ans, trois ans. Préciser pour une unité investie intialement, les revenus livrés par ces trois actifs. (1 pt)

(4) En utilisant le fait qu'à l'équilibre aucun profit d'arbitrage n'est possible, déterminer en fonction des taux d'intérêt des obligations, les prix des zéro-coupons, i.e. les prix des promesses de livraison d'une unité de numéraire dans un an, dans deux ans, dans trois ans. (3 pts)

(5) En utilisant les résultats numériques de la question précédente, déterminer l'investissement le meilleur pour l'entrepreneur (s'il en existe un). (1.5 pts)

9.2 Eléments de correction

9.2.1 Exercice sur l'actualisation

Un entrepreneur peut investir dans deux projets *sans risque*. L'un suppose un investissement initial de 100 et engendre un revenu de 50 une période plus tard, de 100 trois périodes plus tard. L'autre suppose un investissement initial de 50 et engendre un revenu de 70 deux périodes plus tard.

(1) Quelle doit être la méthode que doit suivre l'entrepreneur pour évaluer l'intérêt de ces investissements. (1.5 pts)

Pour évaluer les deux projets l'entrepreneur doit caculer la valeur nette actualisée, i.e. la valeur nette du projet évalué dans le numéraire de la période d'investissement. Pour cela on convertit le numéraire de la première période suivant l'investissement, de la deuxième et de la deuxième et de la troisième, en numéraire d'aujourd'hui. Les prix des zéro-coupons (β_1, β_2, β_3), sont les prix permettant cette conversion. La valeur nette des deux projets est donc :

$$VNA_1 = -100 + 40\beta_1 + 70\beta_3 \tag{29}$$
$$VNA_2 = -50 + 70\beta_2$$

(2) Pour appliquer cette méthode, l'entrepreneur observe la structure par termes des taux d'intérêt des obligations. Le taux d'intérêt des obligations est de 10%, 5% et 10% pour les obligations d'échéance 1 an, deux ans, trois ans. Précisez pour une unité investie intialement, les revenus livrés par ces trois actifs. (1 pt)

	0	1	2	3
obligation d'échéance 1	-1	+1.1	0	0
obligation d'échéance 2	-1	+0.05	+1.05	0
obligation d'échéance 3	-1	+0.1	+0.1	+1.1

(4) En utilisant le fait qu'à l'équilibre aucun profit d'arbitrage n'est possible, déterminer en fonction des taux d'intérêt des obligations, les prix des zéro-coupons, i.e. des promesses de livraison d'une unité de numéraire dans un an, dans deux ans, dans trois ans. (3 pts)

Une obligation d'échéance 1 rapporte autant que 1.1 zéro-coupons. Par conséquent, le prix du zéro-coupon d'échéance 1 est le coût d'investissement de l'obligation, i.e. 1 :

$$1 = \beta_1 \times 1.1$$

L'obligation d'échéance 2 rapporte les mêmes revenus qu'un portefeuille comprenant 0.05 zéro-coupon d'échéance 1 et 1.05 zéro-coupons d'échéance 2. Par conséquent, le coût de cette obligation doit être égal au coût du portefeuille :

$$1 = 0.05\beta_1 + 1.05\beta_2$$

Enfin l'obligation d'échéance 3 rapporte les mêmes revenus qu'un portefeuille comprenant 0.1 zéro-coupon d'échéance 1, .1 zéro-coupons d'échéance 2 et 1.1 zéro-coupons d'échéance 3. Par conséquent, le coût de cette obligation doit être égal au coût du portefeuille :

$$1 = 0.1\beta_1 + .1\beta_2 + 1.1\beta_3$$

Par conséquent à l'équilibre du marché on a :

$$\begin{cases} 1 = \frac{11}{10}\beta_1 \\ 1 = \frac{1}{20}\beta_1 + \frac{21}{20}\beta_2 \\ 1 = \frac{1}{10}\beta_1 + \frac{1}{10}\beta_2 + \frac{11}{10}\beta_3 \end{cases}$$

$$\beta_3 = \frac{90}{121}, \beta_2 = \frac{10}{11}, \beta_1 = \frac{10}{11}$$

(5) En utilisant les résultats numériques de la question précédente, déterminer l'investissement le meilleur pour l'entrepreneur (s'il en existe un). (1.5 pts)

A l'aide des valeurs numériques, on calcule la valeur nette actualisée de chaque projet :

$$VNA_1 = -100 + 40\frac{10}{11} + 70\frac{90}{121} = \frac{1410}{121} = 11.653 \tag{30}$$

$$VNA_2 = -50 + 70\frac{10}{11} = \frac{230}{11} = 20.909 \tag{31}$$

Le projet à choisir est celui donnant la valeur nette actualisée la plus élevée.

10 Partiel de janvier 2003

10.1 Intitulé

10.1.1 Cours (8 points)

Au choix, deux des trois questions suivantes :
(1) Risque de cours (= de prix) et production. (4 points)
(2) Optimalité de l'équilibre général dans l'incertain. (4 points)
(3) Aversion à l'égard du risque et assurance. (4 points)

10.1.2 Exercice 1 (4 points)

On considère deux actifs 1 et 2 dont les revenus sont $d_1 = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}^T$ et $d_2 = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 \end{bmatrix}^T$, dont les prix sont $q_1 = 5$, $q_2 = 10$.

(1) Peut-on déterminer à l'aide de ces deux actifs le taux d'intérêt de l'économie ? (1.5 pts)

(2) Montrez que l'on ne peut déterminer par arbitrage le prix d'un actif dont les revenus sont $\begin{bmatrix} 15 & 10 & 15 \end{bmatrix}^T$. (1.5 pts) ;

(3) Pourrait-on le déterminer si l'on ajoutait aux deux actifs un troisième actif dont les revenus sont $\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}^T$ et dont le prix est $q_3 = \frac{50}{6}$? (1 point)

10.1.3 Exercice 2 (8 points)

L'économie comporte : un bien non stockable pris comme numéraire, deux dates ($t = 0, 1$), deux entreprises ($j = a, b$), deux individus indicés i ($i = 1, 2$). A la première période, les deux agents utilisent leurs dotations pour consommer. A la seconde période, ils disposent uniquement des productions des entreprises. Celles-ci sont cependant aléatoires. La production globale peut prendre deux valeurs : l'une haute (h) avec une probabilité de 1/2, l'autre basse (l) avec une probabilité de 1/2. Numériquement, la production globale et les productions des deux entreprises sont les suivantes :

	h	l
production globale	100	90
a	40	60
b	60	30

A la période 1, les individus avant de consommer doivent brièvement stocker les biens. Lorsque la production est basse (l), les mêmes facteurs qui expliquent ce faible niveau rendent le stockage parfois coûteux. Plus précisément, on suppose que pour chaque agent, le stockage occasionne avec une probabilité de 1/2 une perte de 10. Ce risque de dommage est supposé être exclusif au sens où si l'agent 1 subit le dommage, l'agent 2 ne le subit pas, et vice versa.

Chaque individu i maximise l'utilité espérée $U_i = \mathbf{E}[\widetilde{u}_i]$ dont l'utilité élémentaire est :

$$\widetilde{u}_i = \ln\left(c_0^i\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\widetilde{c}^i\right) \tag{32}$$

où c_0^i est la consommation de la pérmière période, $\widetilde{c}^i$ la consommation aléatoire de la seconde période.

Les entreprises sont possédées par les deux agents. Les dotations de la période 0 et les parts dans les entreprises que possèdent initialement les deux agents sont les suivantes :

i	$\omega^i(0)$	$\theta_a^i(0)$	$\theta_b^i(0)$
1	50	0.4	0.8
2	30	0.6	0.2

Pour modifier leurs consommations (présentes et futures), les agents ont accès à des marchés financiers (ouverts à la période 0) où ils peuvent notamment acheter et vendre les parts des actions des entreprises aux prix q_a et q_b.

(1) Montrer que l'économie décrite comprend trois états du monde dont les probabilités sont 1/2, 1/4, 1/4. Déterminer pour chaque état du monde les consommations globales. (On pourra s'aider d'une représentation graphique de l'arbre des événements de l'économie). (1 point)

(2) Démontrer que l'utilité que maximise chaque agent est :

$$U_i = \ln(c_0^i) + \frac{2}{5}\ln(c_1^i) + \frac{1}{5}\ln(c_2^i) + \frac{1}{5}\ln(c_3^i)$$

où c_1^i, c_2^i, c_3^i sont les consommations dans les trois états du monde dont les probabilités sont respectivement 1/2, 1/4, 1/4. (1 point)

(4) Montrer que les marchés sont complets dès lors que les agents ont à leur disposition, outre les deux actions, un troisième titre dont les revenus sont $d_3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}^T$. Que représente ce troisième actif ? (1 point)

(5) Déterminer les prix des deux actions, q_a et q_b, du troisième actif ainsi que le taux d'intérêt de l'économie. (2.5 points)

(6) Déterminer les consommations de l'agent 1 et son portefeuille. Pourquoi ses consommations dans les deux états de probabilité 1/4 sont-elles égales ? (2.5 points) (Remarque : le dommage de 10 peut être formellement assimilé à une dotation égale à -10).

10.2 Eléments de correction

10.2.1 Exercice I (4 points)

On considère deux actifs 1 et 2 dont les revenus sont $d_1 = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}^T$ et $d_2 = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 \end{bmatrix}^T$, dont les prix sont $q_1 = 5$, $q_2 = 10$.

(1) Le taux d'intérêt de l'économie ?

Le taux d'intérêt peut être déterminé par arbitrage si les actifs dont les revenus sont certains peuvent être synthétisés par les deux actifs 1 et 2. Sans perte de généralité, on s'intéresse uniquement à l'actif certain dont les revenus sont 1 dans les trois états du monde. Cet actif est synthétisable s'il existe un portefeuille comprenant x actifs 1 et y actifs 2 dont les revenus sont 1 dans les trois états :

$$\begin{cases} 10x + 10y = 1 \\ 20x + 5y = 1 \\ 15y = 1 \end{cases}$$

La solution est :

$$x = \frac{1}{30}, y = \frac{1}{15}$$

Le coût de ce portefeuille est :

$$C = \frac{1}{30} \times 5 + \frac{1}{15} \times 10 = \frac{5}{6}$$

et donc le taux d'intérêt est donné par la condition d'arbitrage selon laquelle deux produits financiers donnant les mêmes revenus doivent avoir le même prix (ou le même coût) :

$$\frac{1}{1+r} = C \Rightarrow r = \frac{1}{C} - 1 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

(2) Montrez que l'on ne peut déterminer par arbitrage le prix d'un actif dont les revenus sont $\begin{bmatrix} 15 & 10 & 15 \end{bmatrix}$

Les actifs synthétisables sont ceux dont les revenus a, b, c peuvent être reproduits par les deux premiers actifs, i.e. ceux pour lesquels il existe des portefeuilles (x, y) d'actifs 1 et 2 dont les revenus sont a, b, c dans les trois états du monde :

$$\begin{cases} 10x + 10y = a \\ 20x + 5y = b \\ 15y = c \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent :

$$\begin{matrix} 10x + 10y = a \\ 20x + 5y = b \end{matrix} \Rightarrow x = -\frac{1}{30}a + \frac{1}{15}b, y = \frac{2}{15}a - \frac{1}{15}$$

alors que les deux dernières donnent :

$$\begin{matrix} 20x + 5y = b \\ 15y = c \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{1}{20}b - \frac{1}{60}c, y = \frac{1}{15}c$$

Pour que le système ait une solution, il est nécessaire que les solutions des deux systèmes à deux équations soient cohérentes entre elles, i.e. donnent le même portefeuille, le même x, le même y (sinon l'incohérence indique que l'on ne peut obtenir le profil souhaité a, b, c) :

$$\begin{matrix} x = \frac{1}{20}b - \frac{1}{60}c = -\frac{1}{30}a + \frac{1}{15}b \\ y = \frac{1}{15}c = \frac{2}{15}a - \frac{1}{15}b \end{matrix}$$

d'où :

$$c = 2a - b$$

Les seuls actifs synthétisables avec les deux actifs 1 et 2 spécifiés sont donc les actifs dont le revenu dans l'état 3 et e double de celui de l'état 1 diminué de celui de l'état 2. L'actif proposé ne vérifie pas cette dernière condition : il n'est donc pas synthétisable et ne peut donc être évalué par arbitrage.

(3) Pourrait-on le déterminer si l'on ajoutait aux deux actifs un troisième actif dont les revenus sont $\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$ et dont le prix est $q_3 = \frac{50}{6}$.

Les deux actifs 1 et 2 ne synthétisent comme on l'a vu que les actifs dont les revenus sont dans le plan engendré par leurs propres vecteurs de revenus. Lorsque un actif n'est pas synthétisable par 1 et 2, son vecteur de revenu n'appartient pas au plan engendré. Pour le synthétiser, il est donc nécessaire de compléter la base vectorielle par un troisième vecteur *n'appartenant pas au plan engendré par les deux actifs* 1 et 2. Or, comme on l'a vu à la première question les actifs certains sont engendrés par les deux premiers actifs. Par conséquent, rajouter donc à ceux-ci un actif certain n'augmente pas l'espace des revenus synthétisables.

10.2.2 Exercice II (8 points)

L'économie comporte : un bien non stockable pris comme numéraire, deux dates ($t = 0, 1$), deux entreprises ($j = a, b$), deux individus indicés i ($i = 1, 2$). A la première période, les deux agents utilisent leurs dotations pour consommer. A la seconde période, ils disposent uniquement des productions des entreprises. Celles-ci sont cependant aléatoires. La production globale peut prendre deux valeurs : l'une haute (h) avec une probabilité de 1/2, l'autre basse (l) avec une probabilité de 1/2. Numériquement, la production globale et les productions des deux entreprises sont les suivantes :

	h	l
production globale	100	90
a	40	60
b	60	30

A la période 1, les individus avant de consommer doivent brièvement stocker les biens. Lorsque la production est basse (l), les mêmes facteurs qui expliquent ce faible niveau rendent le stockage parfois coûteux. Plus précisément, on suppose que pour chaque agent, le stockage occasionne avec une probabilité de 1/2 une perte de 10. Ce risque de dommage est supposé être exclusif au sens où si l'agent 1 subit le dommage, l'agent 2 ne le subit pas, et vice versa.

Chaque individu i maximise l'utilité espérée $U_i = \mathbf{E}\left[\widetilde{u}_i\right]$ dont l'utilité élémentaire est :

$$\widetilde{u}_i = \ln\left(c_0^i\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\widetilde{c}^i\right) \tag{33}$$

où c_0^i est la consommation de la pérmière période, $\widetilde{c}^i$ la consommation aléatoire de la seconde période.

Les entreprises sont possédées par les deux agents. Les dotations de la période 0 et les parts dans les entreprises que possèdent initialement les deux agents sont les suivantes :

i	$\omega^i(0)$	$\theta_a^i(0)$	$\theta_b^i(0)$
1	50	0.4	0.8
2	30	0.6	0.2

Pour modifier leurs consommations (présentes et futures), les agents ont accès à des marchés financiers (ouverts à la période 0) où ils peuvent notamment acheter et vendre les parts des actions des entreprises aux prix q_a et q_b.

(1) Montrer que l'économie décrite comprend trois états du monde dont les probabilités sont 1/2, 1/4, 1/4. Déterminer pour chaque état du monde les consommations globales. (On pourra s'aider d'une représentation graphique de l'arbre des événements de l'économie). (1 point)

(2) Démontrer que l'utilité que maximise chaque agent est :

$$U_i = \ln(c_0^i) + \frac{2}{5}\ln(c_1^i) + \frac{1}{5}\ln(c_2^i) + \frac{1}{5}\ln(c_3^i)$$

où c_1^i, c_2^i, c_3^i sont les consommations dans les trois états du monde dont les probabilités sont respectivement 1/2, 1/4, 1/4. (1 point)

(4) Montrer que les marchés sont complets dès lors que les agents ont à leur disposition, outre les deux actions, un troisième titre dont les revenus sont $d_3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}^T$. Que représente ce troisième actif ? (1 point)

(5) Déterminer les prix des deux actions, q_a et q_b, du troisième actif ainsi que le taux d'intérêt de l'économie. (2.5 points)

(6) Déterminer les consommations de l'agent 1 et son portefeuille. Pourquoi ses consommations dans les deux états de probabilité 1/4 sont-elles égales ? (2.5 points) (Remarque : le dommage de 10 peut être formellement assimilé à une dotation égale à -10).

(1) La structure des événements dans l'économie

Les événements portent à la fois sur les dotations globales, et sur les dotations individuelles :

- la dotation globale peut être soit importante (événement h) soit faible (événement l) ;
- si la dotation globale est faible alors les dotations individuelles peuvent subir des pertes de stockage (égales à 10), la probabilité d'occurence de cet événement étant de 1/2 pour chaque agent, la corrélation des deux pertes individuelles étant à la fois négative et parfaite (si l'un la subit, l'autre y échappe).

Par conséquent, le croisement de ces événements définit trois états du monde :

production globale	perte de stockage de a	perte de stockage de b	état du monde	probabilité d'occurrence
100	0	0	1	1/2
90	10	0	2	1/4 (1/2 × 1/2)
90	0	10	3	1/4 (1/2 × 1/2)

(2) la fonction d'utilité

L'utilité élémentaire est évalué par chaque agent dans les trois états du monde possible pour obtenir son utilité espéré :Chaque individu i maximise l'utilité espérée $U_i = \mathbf{E}\left[\widetilde{u}_i\right]$ dont l'utilité élémentaire est :

$$\widetilde{u}_i = \ln\left(c_0^i\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\widetilde{c}^i\right) \tag{34}$$

$$\begin{aligned} U_i &= \mathbf{E}\left[\widetilde{u}_i\right] = \mathbf{E}\left[\ln\left(c_0^i\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\widetilde{c}^i\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(c_0^i\right) + \frac{4}{5}\ln\left(c_1^i\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\ln\left(c_0^i\right) + \frac{4}{5}\ln\left(c_2^i\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\ln\left(c_0^i\right) + \frac{4}{5}\ln\left(c_3^i\right)\right) \end{aligned}$$

où c_1^i, c_2^i, c_3^i sont les consommations de seconde période dans les états 1, 2, 3. En rassemblant les termes $\ln\left(c_0^i\right)$, l'utilité espérée se réécrit donc :

$$U_i = \ln\left(c_0^i\right) + \frac{2}{5}\ln\left(c_1^i\right) + \frac{1}{5}\ln\left(c_2^i\right) + \frac{1}{5}\ln\left(c_3^i\right)$$

(3) La complétude des marchés

Il existe trois états et les agents ont à leur disposition trois actifs. La matrice des revenus de ces actifs est :

$$V = \begin{bmatrix} 40 & 60 & 0 \\ 60 & 30 & 5 \\ 60 & 30 & -5 \end{bmatrix}$$

Le déterminant est de cette matrice est : 24000. Par conséquent, ses trois vecteurs colonnes sont linéairement indépendant. En combinant linéairement les trois actifs, i.e. en formant des portefeuilles, on est donc capable d'obtenir n'importe quel profil de revenus futurs : les marchés financiers sont donc complets.

(4) Comme les marchés sont complets, il existe des prix d'états uniques égaux aux Tms de l'agent représentatif :

$$U_i = \ln(c_0^i) + \frac{2}{5}\ln(c_1^i) + \frac{1}{5}\ln(c_2^i) + \frac{1}{5}\ln(c_3^i)$$

$$\beta_1 = \frac{2}{5}\frac{80}{100} = \frac{8}{25} = 0.32$$

$$\beta_2 = \frac{1}{5}\frac{80}{80} = 0.2$$

$$\beta_1 = \frac{1}{5}\frac{80}{80} = 0.2$$

Par conséquent les prix des autres actifs sont :

$j \backslash s$	h	b
globale	100	90
a	40	60
b	60	30

$$q_a = 0.32 \times 40 + 0.2 \times 60 + 0.2 \times 60 = 36.8$$

$$q_b = 0.32 \times 60 + 0.2 \times 30 + 0.2 \times 30 = 31.2$$

$$q_3 = 0.32 \times 0 + 0.2 \times 5 + 0.2 \times -5 = 0$$

$$r = \frac{1}{0.32 + 0.2 + 0.2} - 1 = 38.889\%$$

(3) Pour déterminer les portefeuilles des agents, on va tout d'abord déterminer les consommations d'équilibre que les portefeuilles doivent financier.

Commençons par l'agent 1. Comme les marchés financiers sont complets, tout se passe comme si chaque agent opérait sous une contrainte budgétaire unique dont les termes sont les valeurs présentes des consommations présentes et futures, les dotations présentes et futures valorisées à l'aide des prix des états β_1, β_2 et β_3. La contrainte budgétaire consolidée implicite de l'agent 1 est donc :

$$c_0^1 + \beta_1 c_1^1 + \beta_2 c_2^1 + \beta_3 c_3^1 = 50 + 0.4q_a + 0.8q_b - 10\beta_2$$

Après quelques calculs, on trouve ses fonctions de consommation :

$$c_0^1 = \frac{5}{9}\left[50 + 0.4q_a + 0.8q_b - 10\beta_2\right]$$

$$c_1^1 = \frac{2}{9}\frac{\left[50 + 0.4q_a + 0.8q_b - 10\beta_2\right]}{\beta_1}$$

$$c_2^1 = c_3^1 = \frac{1}{9}\frac{\left[50 + 0.4q_a + 0.8q_b - 10\beta_2\right]}{\beta_2}$$

Comme les prix sont connus, en les utilisant on détermine ses consommations à l'équilibre.

Numériquement :

$$50 + 0.4q_a + 0.8q_b - 10\beta_2 = 50 + 0.4 \times 36.8 + 0.8 \times 31.2 - 10 \times .2 = 87.68$$

$$c_0^1 = \frac{5}{9}87.68 = 48.711$$

$$c_1^1 = \frac{2}{9}\frac{87.68}{0.32} = 60.889$$

$$c_2^1 = c_3^1 = \frac{1}{9}\frac{87.68}{0.2} = 48.711$$

Une fois connus ces consommations, on passe à la recherche du portefeuille qui les donne. Pour cela on utilise les containtes budgétaires de l'agent 1 :

$$\begin{cases} c_0^1 + q_a\theta_a^1 + q_b\theta_b^1 + q_3 z_3^1 = 50 + 0.4q_a + 0.8q_b \\ c_1^1 = 40\theta_a^1 + 60\theta_b^1 \\ c_2^1 = -10 + 60\theta_a^1 + 30\theta_b^1 + 5z_3^1 \\ c_3^1 = 60\theta_a^1 + 30\theta_b^1 - 5z_3^1 \end{cases}$$

En se limitant aux trois contraintes de la seconde période, et après substitution des valeurs numériques, le portefeuille d'équilibre est donné par le système formé par les trois contraintes budgétaires futures :

$$\begin{cases} 60.889 = 40\theta_a^1 + 60\theta_b^1 \\ 48.711 = -10 + 60\theta_a^1 + 30\theta_b^1 + 5z_3^1 \\ 48.711 = 60\theta_a^1 + 30\theta_b^1 - 5z_3^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60.889 = 40x + 60y \\ 48.711 = -10 + 60x + 30y + 5z \\ 48.711 = 60x + 30y - 5z \end{cases}$$

dont la solution est :

$$z_3^1 = 1.0, \theta_a^1 = .58166, \theta_b^1 = .62704$$

La valeur de z_3^1 est intuitive. Le troisième actif est en effet le contrat d'assurance contingent à la réalisation de l, où l'agent 2 assure 1 complètement (indemnité = 10) pour un prix équitable (égal à $1/2$) ; si l ne se produit pas, les agents n'ont pas se couvrir contre les pertes de stockage - aussi le revenu de l'actif est 0 ; lorsque l'agent 1 subit le dommage il reçoit donc 10 et verse sa prime (10×0.5)- soit un revenu net de 5 dans l'état du monde 2 ; lorsqu'il ne subit pas le dommage dans l'état 3, il paie seulement sa prime - d'où un revenu net pour l'agent 1 de -5. Ceci explique donc les composantes du vecteur des revenus de cet actif :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Il est donc normal que l'agent 1 n'en achète qu'une unité - ceci lui permettant de se couvrir complètement.

Evidemment, le portefeuille de l'agent 2 est obtenu immédiatement puisque les actifs achetés par l'agent 1 sont nécessairement vendus par l'agent 2, et réciproquement.

11 Examen de septembre 2003

11.1 Intitulé

11.1.1 Cours (7 points)

Au choix une des questions suivantes :
(1) Productivité et investissement.
(2) L'aversion à l'égard du risque - sa définition, sa mesure et ses conséquences sur l'équilibre économique.
(2) L'évaluation des titres financiers en incertitude : complétude, arbitrage, optimalité de l'équilibre.

11.1.2 Exercice I (5 points)

On considère une économie comprenant deux périodes $t = 0, 1$ peuplée par un unique agent : Robinson. A chaque date, il existe un bien de consommation non stockable ; les préférences de l'unique agent sur ces biens sont résumées par la fonction d'utilité U :

$$U = (c_0)^{\frac{6}{10}} (c_1)^{\frac{4}{10}}$$

où c_t est la quantité du bien de la période t consommée. La dotation de l'agent à la première période ($t = 0$) est $\Omega_0 = 100$, la dotation à la seconde période est Ω_2. Le bien de la période 2 peut également être produit à l'aide d'une technologie utilisant le bien de la période 0 comme facteur de production ; la technologie est résumée par la fonction de production :

$$q = \theta\sqrt{k},\ \theta > 0,\ k \geq 0$$

La technologie est possédée par une entreprise dont Robinson est l'unique actionnaire. Le bien de consommation est pris comme numéraire à chaque date. Les agents peuvent échanger *à chaque période* les biens sur des marchés spots. A la date 0, est également mis en place un marché financier sur lequel les agents peuvent emprunter ou prêter au taux d'intérêt r.

1. En notant S l'épargne de Robinson, Π le profit *actualisé* de l'entreprise, donnez l'écriture des contraintes budgétaires de Robinson, de sa contrainte budgétaire intertemporelle, celle du profit *actualisé* de l'entreprise. (2 points)
2. Après avoir rappelé les conditions marginales que doivent vérifiées les décisions de production et de consommation, déterminez l'investissement k et le taux d'intérêt r d'équilibre pour $\theta = 12$, $\Omega_1 = 0$. (2 points)
3. En utilisant vos réponses à la question 2, déterminez l'effet sur k d'une augmentation de θ et de Ω_1. (2 points)

11.1.3 Exercice II (8 points)

Une économie d'échange comporte :
- un seul bien non stockable (pris comme numéraire) ;
- deux dates ($t = 0, 1$) ;
- 2 consommateurs ($i = A, B$) vivant pendant les périodes considérées ;
- 3 états de la nature ($s = 1, 2, 3$), dont les probabilités objectives sont respectivement $\pi(1) = \frac{1}{4}$, $\pi(2) = \frac{1}{2}$, $\pi(3) = \frac{1}{4}$.

Les consommateurs ont la même fonction d'utilité de von Neumann, dont l'utilité élémentaire est :

$$u_i[c_i(0), c_i(s)] = \frac{c_i(0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta.\frac{c_i(s)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \text{ avec } \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{5}{6} \end{cases}$$

On note $\omega_i(0)$ la dotation initiale et $\omega_i(s)$ les dotations aléatoires attribuées au consommateur i dans l'état s - les quantités sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_A(0) &= 25,\ \omega_A(1) = 30,\ \omega_A(2) = 60,\ \omega_A(3) = 90 \\ \omega_B(0) &= 75,\ \omega_B(1) = 80,\ \omega_B(2) = 60,\ \omega_B(3) = 40 \end{aligned}$$

A la période 0, les agents peuvent vendre et acheter trois actifs financiers $j = 1, 2, 3$ dont les dividendes sont :

$$d_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \ d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}, \ d_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

et dont les prix sont notés q_1, q_2 et q_3. La demande *nette* de l'actif j ($j = 1, 2, 3$) de l'agent i ($i = A, B$) est notée z_j^i.

1. Après avoir démontré que le système des marchés financiers est complet, calculez la valeur des prix d'équilibre q_1, q_2, q_3 ainsi que le taux d'intérêt (= taux d'actualisation de l'économie) (4 points)
2. Déterminez les consommations et les portefeuilles d'équilibre des agents. (4 points)

11.2 Eléments de correction

11.2.1 Exercice 1

Les contraintes budgétaires de Robinson :

$$\begin{cases} \textit{période } 0 : & c_0 + S = \Omega_0 + \Pi \\ \textit{période } 1 : & c_1 = \Omega_1 + (1+r)S \end{cases}$$

et donc, comme :

$$S = \frac{c_1 - \Omega_1}{1+r}$$

après substitution, la contrainte intertemporelle est :

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = \Omega_0 + \frac{\Omega_1}{1+r} + \Pi$$

Le profit de l'entreprise s'écrit lui :

$$\Pi = \frac{q}{1+r} - k$$

Les contraintes de ressources que l'on doit vérifier à l'équilibre sont celles portant sur les biens de la période 0 et 1 :

$$\begin{cases} \textit{période } 1 : & c_0 + k = \Omega_0 \\ \textit{période } 2 : & c_1 = \Omega_1 + q \end{cases}$$

La condition marginale est celle caractérisant les choix optimaux de consommation dans la contrainte budgétaire :

$$Tms_{0\to 1} = \frac{4}{6}\frac{c_0}{c_1} = \frac{1}{1+r}$$

ainsi que celle caractérisant l'investissement optimal pour l'entreprise :

$$\frac{\partial}{\partial k} q = \frac{\theta}{2\sqrt{k}} = 1 + r$$

ou encore :

$$TMT_{0\to 1} = -\frac{dk}{dq} = \frac{2\sqrt{k}}{\theta} = \frac{1}{1+r}$$

Une contrainte additionnelle (non demandée) est celle du marché financier :

$$S = k$$

où k est ici la valeur de l'endettement de l'entreprise (utilisée pour financer l'investissement).

Les conditions vérifiées à l'équilibre sont donc :

$$\begin{cases} \textit{Robinson} & \textit{cond. marg.} & Tms_{0\to 1} = \frac{1}{1+r} \\ & \textit{cont. budgétaire} & c_0 + \frac{c_1}{1+r} = \Omega_0 + \frac{\Omega_1}{1+r} + \Pi \\ & & \\ \textit{Entreprise} & \textit{cond. marg.} & TMT_{0\to 1} = \frac{1}{1+r} \\ & \textit{profit} & \Pi = \frac{q}{1+r} - k \\ & & \\ \textit{Equilibre} & \textit{bien période } 0 & c_0 + k = \Omega_0 \\ \textit{des} & \textit{marché financier} & S = k \\ \textit{marchés} & \textit{bien période } 1 & c_1 = q + \Omega_1 \\ & & \\ \textit{liaison} & & q = \theta\sqrt{k} \end{cases}$$

L'équilibre impose donc l'égalisation du Tms de Robinson au TMT de l'entreprise :

$$\left\{\begin{array}{l} Tms_{0\to 1} = \frac{1}{1+r} \\ TMT_{0\to 1} = \frac{1}{1+r} \end{array}\right. \Rightarrow Tms_{0\to 1} = TMT_{0\to 1}$$

et donc après substitutions :

$$\frac{4}{6}\frac{100-k}{\Omega_1+\theta\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{k}}{\theta}$$

Cette équation détermine implicite une variable endogène, l'investissement k, en fonction des paramètres de l'économie Ω_1 et θ.

Si : $\Omega_1 = 0$, $\theta = 25$, l'équation s'écrit alors simplement :

$$\begin{aligned} \frac{4}{6}\frac{100-k}{\sqrt{k}} &= 2\sqrt{k} \Rightarrow \frac{4}{6}(100-k) = 2k \\ &\Rightarrow \quad k = \frac{400}{16} = \frac{100}{4} = 25 \end{aligned}$$

Connaissant le stock de capital d'équilibre, le taux d'intérêt d'équilibre de l'économie peut être obtenu des conditions marginales :

$$\begin{aligned} Tms_{0\to 1} &= \frac{4}{6}\frac{100-25}{25\sqrt{25}} = \frac{1}{1+r} \\ &\Rightarrow \quad r = \frac{6}{4}\frac{12\sqrt{25}}{100-25} - 1 = 0.2 \end{aligned}$$

L'analyse de l'équation déterminant l'investissement :

$$Tms_{0\to 1} = \frac{4}{5}\frac{100-k}{\Omega_1+\theta\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{k}}{\theta} = TMT_{0\to 1}$$

montre que :

- l'investissement est négativement affecté par un accroissement de la dotation future Ω_1 - plus la dotation future est importante, plus la valeur pour Robinson de la consommation future ($Tms_{0\to 1}$) est faible et donc plus l'investissement souhaité est faible ;
- si la dotation future (Ω_1) est nulle, l'investissement n'est pas affecté par les chocs de productivité - un tel choc diminuant dans les mêmes proportions le Tms et le TMT ;
- si la dotation future est positive, le Tms diminue moins que le TMT et donc, comme la valeur de la consommation future devient plus grande que son coût, l'investissement augmente.

11.2.2 Exercice 2

Si l'on note z_j^i la demande nette de l'actif j de l'agent i, et si l'on prend comme numéraire à chaque date-événement le bien de consommation, les contraintes budgétaires de cet agent i sont :

$$\left\{\begin{array}{l} c_0^i + \sum_{j=1,2,3} q_j.z_j^i = \omega_0^i \\ c_1^i = \omega_1^i + \sum_j d_j(1).z_j^i \\ c_2^i = \omega_2^i + \sum_j d_j(2).z_j^i \\ c_3^i = \omega_3^i + \sum_j d_j(3).z_j^i \end{array}\right.$$

Pour que le système financier soit complet, il faut (et il suffit) que les vecteurs des revenus livrés par les actifs soient linéairement indépendants. Mathématiquement, ceci revient à s'assurer que le déterminant de la matrice des revenus :

$$d = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 0 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

est non nul. On constate que ceci est bien le cas :

$$\begin{aligned} \det\ d &= 10\times 20\times 10 + 0 + 0 - 10\times 20\times 20 - 10\times 10\times 10 - 0 \\ &= -3000 \neq 0 \end{aligned}$$

Le marché étant complet, il existe un système de prix d'états uniques dont les valeurs sont celles qu'auraient à l'équilibre les prix des actifs à la Arrow-Debreu. Pour les déterminer, on exploite l'existence pour notre économie d'un agent représentatif puisque les préférences sont identiques et les Tms homogènes. L'utilité espérée s'écrivant :

$$\mathbf{E}[u_i\left[c_i\left(0\right), c_i\left(s\right)\right]] = \frac{c_i\left(0\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta.\sum_s \pi_s \left(\frac{c_i\left(s\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

le Tms de l'agent i est en effet :

$$Tms^i_{0\to s} = \beta\pi_s \left[\frac{c_i(0)}{c_i(s)}\right]^\gamma$$

Dans une telle économie d'échanges, avec l'existence d'un agent représentatif, les valeurs des actifs à la Arrow-Debreu sont données par celles des Tms de l'agent représentatif évalués au point de dotation :

$$\beta_s = Tms^{AR}_{0\to s} = \beta\pi_s \left[\frac{\Omega(0)}{\Omega(s)}\right]^\gamma \tag{35}$$

Avec les valeurs numériques :

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{5}{6}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{100}{110}} = .200 \\ \beta_2 = \frac{5}{6}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{100}{120}} = .380 \\ \beta_3 = \frac{5}{6}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{100}{130}} = .182 \end{cases}$$

Le taux d'intérêt de l'économie est donc donnée par la relation d'arbitrage :

$$\sum_s \beta_s = \frac{1}{1+r} \Rightarrow r = \frac{1}{\sum_s \beta_s} - 1 = \frac{1}{.2 + .380 + .182} - 1 \approx .31234$$

Les valeur des trois actifs sont données par les relations de valorisation :

$$q_j = \sum_s \beta_s.d_j(s)$$

Numériquement :

$$\begin{aligned} q_1 &= .200\,(10) + .380\,(0) + .182\,(20) = 5.64 \\ q_2 &= .200\,(0) + .380\,(20) + .182\,(10) = 9.42 \\ q_3 &= .200\,(10) + .380\,(10) + .182\,(10) = 7.62 \end{aligned}$$

Pour déterminer les portefeuilles, on peut également utiliser l'équivalence entre l'équilibre à la Arrow-Debreu et l'équilibre avec marchés financiers (complets). En effet, les consommations étant identiques aux deux équilibres, lorsque l'on connaît les consommations $\left(c^i_1, c^i_2, c^i_3\right)$, on peut déterminer les portefeuilles $z^i = \left(z^i_1, z^i_2, z^i_3\right)$ en cherchant les solutions du système formé par les contraintes budgétaires futures :

$$\begin{cases} c^i_1 = \omega^i_1 + \sum_j d_j(1).z^i_j \\ c^i_2 = \omega^i_2 + \sum_j d_j(2).z^i_j \\ c^i_3 = \omega^i_3 + \sum_j d_j(3).z^i_j \end{cases}$$

Pour déterminer les consommations à l'équilibre, on remarque que les conditions marginales $Tms^i_{0\to s} = \beta_s$ donnent des relations linéaires entre les consommations :

$$\beta_s = \beta\pi_s \left[\frac{c_i(0)}{c_i(s)}\right]^\gamma \Rightarrow c_i(s) = c_i(0)\left[\frac{\beta_s}{\beta\pi_s}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

et donc comme la contrainte budgétaire consolidée est :

$$c_i(0) + \sum_s \beta_s c_i(s) = \omega_i(0) + \sum_s \beta_s \omega_i(s)$$

les demandes sont linéaires par rapport à la richesse $\omega_i(0)+\sum_s \beta_s\omega_i(s)$:

$$\begin{aligned}
c_i(0)+\sum_s \beta_s\left[c_i(0)\left[\frac{\beta_s}{\beta\pi_s}\right]^{\frac{1}{\gamma}}\right] &= \omega_i(0)+\sum_s \beta_s\omega_i(s) \\
&\Rightarrow\ c_i(0)=\frac{1}{1+\sum_s \beta_s\left[\frac{\beta_s}{\beta\pi_s}\right]^{\frac{1}{\gamma}}}\times\left[\omega_i(0)+\sum_s \beta_s\omega_i(s)\right] \\
&\Rightarrow\ c_i(s)=\frac{\left[\frac{\beta_s}{\beta\pi_s}\right]^{\frac{1}{\gamma}}}{1+\sum_s \beta_s\left[\frac{\beta_s}{\beta\pi_s}\right]^{\frac{1}{\gamma}}}\times\left[\omega_i(0)+\sum_s \beta_s\omega_i(s)\right]
\end{aligned}$$

Les demandes des différents agents sont donc toutes de la forme :

$$c_s(0)=g_s(\beta_1,\beta_2,\beta_3).W_i,\ s=0,1,2,3$$

où $W_i=\omega_i(0)+\sum_s \beta_s\omega_i(s)$ est la richesse de l'agent i.

Les consommations à l'équilibre des différents agents sont donc proportionnelles à la part de leurs richesses :

$$\begin{cases} \frac{c_A(s)}{c_B(s)}=\frac{g_s(\beta_1,\beta_2,\beta_3).W_A}{g_s(\beta_1,\beta_2,\beta_3).W_B}=\frac{W_A}{W_B} \\ c_A(s)+c_B(s)=\Omega_s \end{cases} \Rightarrow c_A(s)=\frac{W_A}{W_B+W_A}.\Omega_s$$

où Ω_s est la dotation de l'économie dans la date-événement s - $s=0,1,2,3$.

Les richesses des deux agents étant :

$$\begin{cases} W_A=25+.2\times 30+.38\times 60+.182\times 90=70.18 \\ W_B=75+.2\times 80+.38\times 60+.182\times 40=121.08 \end{cases}$$

(puisque :

$$\begin{cases} \beta_1=\frac{5}{6}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{100}{110}}=.200 \\ \beta_2=\frac{5}{6}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{100}{120}}=.380 \\ \beta_3=\frac{5}{6}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{100}{130}}=.182 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\omega_A(0) &= 25,\ \omega_A(1)=30,\ \omega_A(2)=60,\ \omega_A(3)=90 \\
\omega_B(0) &= 75,\ \omega_B(1)=80,\ \omega_B(2)=60,\ \omega_B(3)=40
\end{aligned}$$

les consommations de l'agent A sont :

$$\begin{cases} c_A(0)=\frac{70.18}{70.18+121.08}\times 100=36.69 \\ c_A(1)=\frac{70.18}{70.18+121.08}\times 110=40.36 \\ c_A(2)=\frac{70.18}{70.18+121.08}\times 120=44.03 \\ c_A(3)=\frac{70.18}{70.18+121.08}\times 130=47.70 \end{cases}$$

et celles de l'agent B, obtenu par différence, sont :

$$\begin{cases} c_B(0)=100-36.69=63.31 \\ c_B(1)=110-40.36=69.64 \\ c_B(2)=120-44.03=75.97 \\ c_B(3)=130-47.70=82.3 \end{cases}$$

Le portefeuille de l'agent A est donc la solution du système suivant :

$$\begin{cases} 40.36=80+10z_1+10z_3 \\ 44.03=60+20z_2+10z_3 \\ 47.70=40+20z_1+10z_2+10z_3 \end{cases}$$

et celui de l'agent B la solution de celui-ci :

$$\begin{cases} 69.64=30+10z_1+10z_3 \\ 75.97=60+20z_2+10z_3 \\ 82.3=90+20z_1+10z_2+10z_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 69.64 = 30 + 10x + 10z \\ 75.97 = 60 + 20y + 10z \\ 82.3 = 90 + 20x + 10y + 10z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40.36 = 80 + 10x + 10z \\ 44.03 = 60 + 20y + 10z \\ 47.70 = 40 + 20x + 10y + 10z \end{cases}$$

Les solutions sont évidemment de signes opposées :

$$z_1^A = 2.367,\ z_2^A = 2.367,\ z_3^A = -6.331$$

$$z_1^B = -2.367,\ z_2^A = -2.367,\ z_3^A = 6.331$$

puisque la condition d'équilibre des marchés des actifs est la nullité de la demande nette *totale* :

$$\begin{aligned} z_1^A + z_1^B &= 0 \\ z_2^A + z_2^B &= 0 \\ z_3^A + z_3^B &= 0 \end{aligned}$$

12 Contrôle continu de novembre 2003

12.1 Intitulé

12.1.1 Vrai ou faux (5 points)

NB : Les questions doivent être évaluées dans le cadre économique de la théorie de l'équilibre général intertemporel (information parfaite, etc...).

1. A politique d'investissement constante, la distribution de dividendes supplémentaires est un signal conduisant les marchés à réévaluer à la hausse la valeur boursière des entreprises.
2. Une augmentation anticipée des dotations accroît la valeur des consommations futures pour les agents.
3. Lorsque les consommations d'un agent sont pour lui étroitement substituables, il est naturellement conduit à préférer des profils de consommation relativement lisses (stationnaires).
4. L'existence de marchés financiers permet de mieux ajuster la sélection des investissements d'une entreprise aux préférences de ses actionnaires (-consommateurs).
5. L'existence de marchés financiers implique que toute diminution anticipée de la productivité entraîne une diminution de la valeur des entreprises et de leurs investissements.

12.1.2 Cours (5 points)

Au choix **un des deux** sujets suivants :

1. Marchés financiers et optimalité de l'équilibre.
2. L'information fournie par la structure par termes des taux d'intérêts obligataires.

12.1.3 Exercice I (4 points)

On considère une économie comportant quatre périodes $t = 0, 1, 2, 3$, où les taux d'intérêt des obligations émises en $t = 0$ d'échéance 1, 2 et 3 sont :

	$t=1$	$t=2$	$t=3$
R (*en %*)	5	10	5

Déterminer les taux d'intérêt courts r_t de cette économie.

12.1.4 Exercice II (6 points)

On considère une économie de production comportant trois périodes $t = 0, 1, 2$ et comprenant trois agents : $i = A, B, C$. A la période initiale chaque agent dispose d'une dotation initiale ω_0^i de l'unique bien et devient détenteur d'une part θ^i du capital de l'entreprise représentative de l'économie :

	ω_0^i	θ^i
agent A	0	0.5
agent B	50	0.25
agent C	50	0.25

Chaque agent a des préférences résumées par la fonction d'utilité :

$$U_i = \ln(c_0^i) + \ln(c_1^i) + \ln(c_2^i)$$

Le bien peut être utilisé soit comme bien de consommation par les agents, soit comme bien de production. On note k_0 le capital investi à la période 0 (pour obtenir du bien de la période 1), k_1 le capital investi à la période 1 pour obtenir du bien de la période 2. La fonction de production de l'entreprise à la période 0 est :

$$q_1 = \eta\sqrt{k_0}$$

où η est un paramètre de productivité, et celle utilisable à la période 1 est :

$$q_2 = \sqrt{k_1}$$

Aux périodes 0 et 1, des marchés financiers de fonds prêtables s'ouvrent sur lesquels les agents (consommateurs et entreprise) peuvent prêter ou emprunter aux taux d'intérêt r_1 et r_2. Aussi, le profit actualisé de l'entreprise s'écrit :

$$\Pi = \frac{q_1}{1+r_1} - k_0 + \frac{q_2}{(1+r_2)(1+r_1)} - \frac{k_1}{1+r_1}$$

- Donnez les contraintes budgétaires de l'agent B aux périodes 0, 1 et 2, puis sans démonstration sa contrainte budgétaire intertemporelle. (1.5 points)
- Démontrer que la règle d'investissement à la période 1 observé à l'équilibre est de n'investir que le tiers des ressources disponibles : $k_1 = \frac{1}{3}q_1$(1 point)
- En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le capital k_0 à l'équilibre. (1.5 points)
- En utilisant les résultats antérieurs, déterminez l'investissement k_1, les productions q_1, q_2 en fonction de η. Expliquez les effets d'une augmentation de η sur ces variables ainsi que sur k_0. (2 points)

12.2 Eléments de correction

12.2.1 Exercice I

Les taux d'intérêt des obligations classiques (supposées émises au pair) à 1, 2, 3 ans sont :

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
R *(en %)*	5	10	5

Pour déterminer les taux d'intérêt courts, on procède en deux étapes :

1. on détermine les prix des zéro-coupons compatibles avec les taux d'intérêt des obligations en recourant à l'absence de profit d'arbitrage ;
2. puis, connaissant les prix des zéro-coupons, on détermine les taux d'intérêt courts compatibles avec eux.

Pour la première étape, on utilise la propriété que le coût de l'obligation (la mise de fonds de 1) en 0 est égal à la valeur actualisée des revenus. Ainsi, pour l'obligation dont l'échéance est la période 1, son revenu étant à cette période au capital augmenté des intérêts, c'est-à-dire de 1.05 pour chaque unité investie, alors la relation vérifiée à l'équilibre est :

$$1 = \beta_1 1.05$$

et donc la valeur d'équilibre du zéro-coupon d'échéance 1 est :

$$\beta_1 = \frac{1}{1.05} = 0.952\,38$$

L'obligation d'échéance 2 , pour chaque unité investie, donne à la période 1 un revenu égal à .1, puis à la période 2, période d'échéance du titre, 1.1. Aussi la relation d'équilibre est cette fois :

$$1 = 0.1\beta_1 + 1.1\beta_2$$

Connaissant la valeur de β_1, on en déduit la valeur de β_2 :

$$\beta_2 = \frac{1 - 0.1\beta_1}{1.1} = \frac{1 - 0.1\,(0.952\,38)}{1.1} = 0.822\,51$$

Similairement pour l'obligation d'échéance 3, la relation d'équilibre est :

$$1 = 0.05\beta_1 + 0.05\beta_2 + 1.05\beta_3$$

D'où :

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \frac{1 - 0.05\beta_1 - 0.05\beta_2}{1.05} \\ \beta_3 &= \frac{1 - 0.05\,(0.952\,38) - 0.05\,(0.822\,51)}{1.05} = 0.867\,86 \end{aligned}$$

Après avoir ainsi obtenue les valeurs des zéro-coupons de toutes les échéances, on détermine alors par rabitrage les taux d'intérêt courts anticipés en utilisant la relation :

$$\beta_t = \beta_{t-1} \cdot \frac{1}{1 + r_t}$$

où l'on égalise les coûts actualisés de deux stratégies permettant de recevoir en t une unité de numéraire :

- acheter le zéro-coupon d'échéance t et payer β_t ;
- acheter Q zéro-coupons d'échéance $t-1$, avec $Q = 1/1 + r_t$, en payant immédiatement $\beta_{t-1} \cdot \frac{1}{1+r_t}$, recevoir Q unités de numéraires et les replacer immédiatement sur le marché financier pour une période ; le taux d'intérêt court étant r_t, on reçoit donc finalement en t $Q \times (1 + r_t)$, c'est-à-dire 1 unités de numéraire.

Comme les deux stratégies rapportent le même revenu, elles ont nécessairement à l'équilibre le même coût actualisé, d'où la relation :

$$\beta_t = \beta_{t-1} \cdot \frac{1}{1 + r_t}$$

En appliquant successivement cette relation on trouve donc :

$$r_1 = 5$$

$$r_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} - 1 = \frac{0.952\,38}{0.822\,51} = 0.\,157\,9$$

$$r_3 = \frac{0.822\,51}{0.867\,86} - 1 = -5.\,225\,5 \times 10^{-2}$$

12.2.2 Exercice II

Pour déterminer l'équilibre dynamique de cette économie, il est nécessaire d'une part d'utiliser les relations marginales des optima de Pareto dans les économies de production :

$$Tms_{t \to t+1} = TMT_{t \to t+1}$$

et d'autre part de raisonner à rebours, en appliquant successivement cette relation de la dernière à la première période.

Ainsi à la période 1, on a :

$$\frac{q_1 - k_1}{\sqrt{k_1}} = 2\sqrt{k_1}$$

où q_1 est la production dont on dispose au début de la période 1 et qui est le résultat de l'investissement réalisé à la période 0. Par conséquent, la stratégie d'investissement optimal est d'investir le tiers des ressources disponibles dans l'économie au début de la période 1 :

$$k_1 = \frac{1}{3} q_1$$

Connaissant la stratégie optimale à utiliser à la période 1, on peut déterminer la stratégie optimale de la période précédente, la période 0. Celle-ci est donnée par la relation $Tms_{0\to 1} = TMT_{0\to 1}$:

$$\frac{100 - k_0}{\theta\sqrt{k_0} - k_1} = \frac{2\sqrt{k_0}}{\theta}$$

Comme l'on connaît la stratégie optimale pour k_1, cette condition se récrit :

$$\frac{100 - k_0}{\frac{2}{3}\theta\sqrt{k_0}} = \frac{2\sqrt{k_0}}{\theta}$$

puisque $q_1 = \theta\sqrt{k_0}$. On en déduit la stratégie optimal pour k_0 :

$$\begin{aligned} 100 - k_0 &= \frac{4}{3}k_0 \\ &\Rightarrow \quad k_0 = \frac{3}{7}100 = 42.857 \end{aligned}$$

Connaissant l'investissement optimal de la période 0, on peut réinjecter cette valeur pour obtenir successivement q_1 puis k_1 puis q_2 :

$$q_1 = \theta\sqrt{\frac{3}{7}100} = 6.5465\theta$$

$$k_1 = \frac{1}{3}\theta\sqrt{\frac{3}{7}100} = 2.1822\theta$$

$$q_2 = \sqrt{2.1822}\sqrt{\theta} = 1.4772\sqrt{\theta}$$

13 Partiel de janvier 2004

13.1 Intitulé

13.1.1 Vrai ou faux (4 points)

Sans justification, déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(1) La limite du critère de l'espérance de gain est qu'il surestime ce qu'un agent risquophobe (= ayant de l'aversion à l'égard du risque) est prêt à payer.

(2) Un agent risquophobe se couvrira complètement si la prime d'assurance est égale à la probabilité du dommage.

(3) La complétude des marchés est la conséquence de l'insuffisance du nombre des actifs financiers financiers échangés sur les marchés relativement au nombre des états du monde.

(4) La valeur d'équilibre d'un actif risqué est la valeur actualisée de l'espérance des revenus qu'il livre, l'espérance étant calculée avec les probabilités d'occurence des états du monde.

13.1.2 Cours (4 points)

Au choix, une des deux questions suivantes :

(1) La couverture des risques mutualisables et des risques agrégés (non mutualisables). (4 points)

(2) Les méthodes d'évaluation des actifs financiers risqués : principes et limites. (4 points)

13.1.3 Exercice (12 points)

L'économie comporte : un bien non stockable pris comme numéraire, deux dates ($t = 0, 1$), deux individus indicés i ($i = A, B$). Aux deux périodes, les deux agents perçoivent des dotations pour consommer mais celles de l'agent A sont à la période 2 des dotations risquées :

	$t = 0$	$t = 1$	
		état h	*état l*
A	40	70	30
B	60	50	50

On suppose que les deux états sont équiprobables. Chaque individu i maximise l'utilité espérée $U_i = \mathbf{E}[\widetilde{u}_i]$ dont l'utilité élémentaire est :

$$\widetilde{u}_i = \ln\left(c_0^i\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\widetilde{c}^i\right) \tag{36}$$

où c_0^i est la consommation de la première période, $\widetilde{c}^i$ la consommation aléatoire de la seconde période. L'utilité U_i s'écrit donc :

$$U_i = \ln(c_0^i) + \frac{2}{5}\ln(c_1^i(h)) + \frac{2}{5}\ln(c_1^i(l))$$

où c_0^i est la consommation de la période 0, $c_1^i(h)$ et $c_1^i(l)$ les consommations de la période 1 dans les deux états h et l. Pour cette économie on envisage successivement deux systèmes financiers traité dans les deux parties suivantes.

I. On suppose que les deux agents constituent deux sociétés, $A\&Co$ et $B\&Co$, dont les actions livrent à la seconde période les dotations de la période 1 des deux agents. Initialement avant ouverture des marchés, les deux pères fondateurs des deux sociétés en sont propritaires à 100%. En 0, lorsque les marchés ouvrent, les deux agents peuvent vendre ou acheter des participations dans les deux entreprises. On note θ_A^i et θ_B^i les parts que détiendra l'agent i dans les sociétés $A\&Co$ et $B\&Co$ à la fermeture des marchés - aussi si $\theta_j^i = 1$ l'agent i détient à 100% le capital de la société j et recevra donc 100% des revenus de celle-ci. Les deux prix de ces titres sont notés q_A et q_B.

(1) Démontrer que les marchés financiers sont complets. (1 point)

(2) Quels sont les prix d'équilibre des deux actions. (2 points)

(3) Après avoir déterminé les contraintes budgétaires de l'agent A, sa contrainte budgétaire intertemporelle (en n'oubliant pas que les deux titres sont des titres de propriété détenus initialement en quantités positives) déterminer les consommations et les portefeuilles détenus par l'agent A. (4 points)

II. On suppose désormais qu'il n'y a plus de marchés d'actions à la période 0. Sont mis en place à la période 0 deux marchés financiers : l'un est un marché de fonds prêtables où l'on peut se prêter ou emprunter au taux d'intérêt r, l'autre est un marché de **"futures" sur actions**. On note B^i le montant placé par i sur le marché des fonds prêtables, z^A le nombre des contrats de "futures" vendus par A, z^B le nombre de contrats achetés par l'agent B.

Le contrat de "futures" est un contrat portant sur la dotation future de l'agent A. Un contrat acheté livre **une fraction** de la récolte de la période 1 quel que soit l'état du monde à un prix q déterminé à la période 0. Cette fraction est normalisée à 1. Ainsi si $z^A = 1$ (ou 0.5), A a vendu la promesse de livrer la totalité (ou la moitié) de sa récolte et recevra en contrepartie le prix q (ou $0.5q$). **Le prix n'est cependant payé (ou perçu) qu'à la période** 1.

(1) Déterminer les contraintes budgétaires de l'agent A aux deux périodes $t = 0$ et $t = 1$. Montrer que l'on peut consolider les contraintes budgétaires pour obtenir une contrainte budgétaire intertemporelle. (2 points)

(2) Pourquoi peut-on dire que le contrat de future introduit est un produit d'assurance et non un produit d'épargne. (1 point)

(3) Après avoir vérifié que la structure de marché constitué par les deux actifs soit complète, et donc Pareto-optimale, déterminer les prix des deux contrats, i.e. r et q. (Indication : on pourra après une courte justification utiliser certains des résultats de I) (2 points)

13.2 Eléments de correction de l'exercice

L'économie comporte : un bien non stockable pris comme numéraire, deux dates ($t = 0, 1$), deux individus indicés i ($i = A, B$). Aux deux périodes, les deux agents perçoivent des dotations pour consommer mais celles de l'agent A sont à la période 2 des dotations risquées :

	$t = 0$	$t = 1$	
		état h	*état l*
A	40	70	30
B	60	50	50

On suppose que les deux états sont équiprobables. Chaque individu i maximise l'utilité espérée $U_i = \mathbf{E}[\widetilde{u}_i]$ dont l'utilité élémentaire est :

$$\widetilde{u}_i = \ln\left(c_0^i\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\widetilde{c}^i\right) \tag{37}$$

où c_0^i est la consommation de la première période, $\widetilde{c}^i$ la consommation aléatoire de la seconde période. L'utilité U_i s'écrit donc :

$$U_i = \ln(c_0^i) + \frac{2}{5}\ln(c_1^i\,(h)) + \frac{2}{5}\ln(c_1^i\,(l))$$

où c_0^i est la consommation de la période 0, $c_1^i(h)$ et $c_1^i(l)$ les consommations de la période 1 dans les deux états h et l. Pour cette économie on envisage successivement deux systèmes financiers traité dans les deux parties suivantes.

I. On suppose que les deux agents constituent deux sociétés, $A\&Co$ et $B\&Co$, dont les actions livrent à la seconde période les dotations de la période 1 des deux agents. Initialement avant ouverture des marchés, les deux pères fondateurs des deux sociétés en sont propritaires à 100%. En 0, lorsque les marchés ouvrent, les deux agents peuvent vendre ou acheter des participations dans les deux entreprises. On note θ_A^i et θ_B^i les parts que détiendra l'agent i dans les sociétés $A\&Co$ et $B\&Co$ à la fermeture des marchés - aussi si $\theta_j^i = 1$ l'agent i détient à 100% le capital de la société j et recevra donc 100% des revenus de celle-ci. Les deux prix de ces titres sont notés q_A et q_B.

(1) Démontrer que les marchés financiers sont complets. (1 point)

Les dividendes des deux actions sont :

	$A\&Co$	$B\&Co$
état h	70	50
état l	30	50

Il existe donc deux actifs pour deux états du monde. La dernière condition à vérifier pour la complétude est que les deux actifs ne sont pas coliénaires, ce qui est évidement puisque les revenus du second actif sont constants alors que les revenus du premier varient.

(2) Quels sont les prix d'équilibre des deux actions. (2 points)

Les marchés étant complets, et donc l'équilibre optimal, les agents ayant les mêmes préférences, pour que l'existence d'un agent représentatif soit démontrée il ne reste plus à vérifier que le fait que les Tms des agents sont homogènes de degré 0. Or comme l'utilité est :

$$U_i = \ln(c_0^i) + \frac{2}{5}\ln(c_1^i\,(h)) + \frac{2}{5}\ln(c_1^i\,(l))$$

les Tms sont donc :

$$Tms_{0\to h}^i = \frac{2}{5}\frac{c_0^i}{c_1^i(h)}$$

$$Tms_{0\to l}^i = \frac{2}{5}\frac{c_0^i}{c_1^i(h)}$$

Les Tms sont donc homogènes de degré. Il existe donc un agent représentatif dont la fonction d'utilité est la même que celle des agents.

En exploitant l'existence de cet agent représentatif, on détermine les prix des états :

$$\beta_h = \frac{2}{5}\frac{c_0^{AR}}{c_1^{AR}(h)} = \frac{2}{5}\frac{100}{120} = \frac{1}{3}$$

$$\beta_l = \frac{2}{5}\frac{c_0^{AR}}{c_1^{AR}(l)} = \frac{2}{5}\frac{100}{80} = \frac{1}{2}$$

Ces prix des états sont ceux qui permettent d'évaluer les actifs financiers, et donc les actions des deux entreprises :

$$q_A = \frac{1}{3}(70) + \frac{1}{2}(30) = 38.333$$

$$q_B = (\frac{1}{3} + \frac{1}{2})50 = 41.667$$

(3) Après avoir déterminé les contraintes budgétaires de l'agent A, sa contrainte budgétaire intertemporelle (en n'oubliant pas que les deux titres sont des titres de propriété détenus initialement en quantités positives) déterminer les consommations et les portefeuilles détenus par l'agent A. (4 points)

Les contraintes budgétaires sont donc aux différentes périodes les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{c} c_0^A + q_A z_A + q_B z_B = \omega_0^A + q_A \\ c_h^A = d_A(h) z_A^A + d_B(h) z_B^A \\ c_l^A = d_A(l) z_A^A + d_B(l) z_B^A \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} c_0^A + 38.333 z_A + 41.667 z_B = 40 \\ c_h^A = 70 z_A^A + 50 z_B^A \\ c_l^A = 30 z_A^A + 50 z_B^A \end{array}\right.$$

Comme les marchés sont complets, l'équilibre est équivalent à celui obtenu en disposant des actifs élémentaires, dont les prix sont β_h et β_l. La contrainte budgétaire intertemporelle est donc :

$$c_0^A + \frac{1}{3}c_h^A + \frac{1}{2}c_l^A = 40 + \frac{1}{3}(70) + \frac{1}{2}(30) = 78.333$$

Pour déterminer les demandes de bien, soit on suit la méthode usuelle, soit on exploite le fait que les fonctions de demande sont identiques pour les deux agents et linéaires. Aussi, la consommation à l'équilibre est proportionnelle à la richesse. Les richesses intertemporelles des deux agents sont :

$$W_A = 78.333, \; W_B = 101.67$$

$$\alpha_A = \frac{78.333}{78.333 + 101.67} = 0.43518, \; \alpha_B = \frac{101.67}{78.333 + 101.67} = 0.56482$$

Par conséquent les consommations de A sont :

$$\begin{aligned} c_0^A &= 0.43518\,(100) = 43.518 \\ c_h^A &= 0.43518\,(80) = 34.814 \\ c_l^A &= 0.43518\,(120) = 52.222 : \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} c_0^B &= (1 - 0.43518)\,(100) = 56.482 \\ c_h^B &= (1 - 0.43518)\,(80) = 45.186 \\ c_l^B &= (1 - 0.43518)\,(120) = 67.778 \end{aligned}$$

La connaissance de ces consommations combinées aux contraintes budgétaires de la seconde période permet de déterminer les portefeuilles. Ainsi pour l'agent A, on a nécessairement :

$$\begin{cases} 67.778 = 70x + 50y \\ 45.186 = 30x + 50y \end{cases}$$

et donc :

$$z_A^A = 0.43518 = z_B^A$$
$$z_A^B = 0.5648 = z_B^B$$

II. On suppose désormais qu'il n'y a plus de marchés d'actions à la période 0. Sont mis en place à la période 0 deux marchés financiers : l'un est un marché de fonds prêtables où l'on peut se prêter ou emprunter au taux d'intérêt r, l'autre est un marché de **"futures" sur actions**. On note B^i le montant placé par i sur le marché des fonds prêtables, z^A le nombre des contrats de "futures" vendus par A, z^B le nombre de contrats achetés par l'agent B.

Le contrat de "futures" est un contrat portant sur la dotation future de l'agent A. Un contrat acheté livre **une fraction** de la récolte de la période 1 quel que soit l'état du monde à un prix q déterminé à la période 0. Cette fraction est normalisée à 1. Ainsi si $z^A = 1$ (ou 0.5), A a vendu la promesse de livrer la totalité (ou la moitié) de sa récolte et recevra en contrepartie le prix q (ou $0.5q$). **Le prix n'est cependant payé (ou perçu) qu'à la période** 1.

(1) Déterminer les contraintes budgétaires de l'agent A aux deux périodes $t = 0$ et $t = 1$. Montrer que l'on peut consolider les contraintes budgétaires pour obtenir une contrainte budgétaire intertemporelle. (2 points)

A la première l'agent A consomme ou épargne. Il détermine aussi sa demande de futures mais ne pae :

$$c_0^A + B^A = 40$$

A la seconde période, l'agent perçoit le revenu de son épargne, paie et reçoit le revenu de son contrat de future. Les revenus nets (d_f) versés par le contrat de future (à la seconde période) est la différence entre le revenu de l'action diminué du prix :

$$d_f = \begin{bmatrix} 70 - q \\ 30 - q \end{bmatrix}$$

Comme l'agent A est a priori vendeur du contrat, z^A étant donc la part vendue par A, les contraintes budgétaires sont donc :

$$\begin{aligned} \textit{état } h &: \; c_h^A = 70 + RB^A - z^A\,(70 - q) \\ \textit{état } l &: \; c_l^A = 30 + RB^A - z^A\,(30 - q) \end{aligned}$$

Les différentes contraintes budgétaires forment donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} c_0^A + B^A = 40 \\ c_h^A = 70 + RB^A - z^A\,(70-q) \\ c_l^A = 30 + RB^A - z^A\,(30-q) \end{array}\right.$$

En prenant par exemple la dernière équation, on peut exprimer z^A en fonction des prix, de c_l^A et de B^A. La substitution à z^A de son expression dans la contrainte budgétaire de l'état h permet cette fois d'exprimer B^A en fonction des consommations (c_h^A et c_l^A) et des prix. Par conséquent, si l'on prend la contrainte budgétaire de la première période, on peut cette fois substituer à B^A son expression. Celle-ci dépendant uniquement des prix et des consommations de la seconde période, on a donc nécessairement une contrainte budgétaire définie sur l'ensemble des consommations (présentes et futures).

Formellement, la dernière contrainte nous donne donc :

$$z^A = \frac{30 + RB^A - c_l^A}{30-q}$$

En plongeant cette expression dans la contrainte budgétaire de l'état h :

$$c_h^A = 70 + RB^A + \left(30 + RB^A - c_l^A\right)\frac{70-q}{q-30}$$

et donc :

$$B^A = \frac{c_h^A + \frac{70-q}{q-30}c_l^A - 70 - 30\frac{70-q}{q-30}}{R(1+\frac{70-q}{q-30})}$$

La substitution dans la contrainte budgétaire donne alors :

$$c_0^A + \frac{c_h^A + \frac{70-q}{q-30}c_l^A - 70 - 30\frac{70-q}{q-30}}{R(1+\frac{70-q}{q-30})} = 40$$

et donc en réarrageant :

$$c_0^A + \frac{1}{R(1+\frac{70-q}{q-30})}c_h^A + \frac{\frac{70-q}{q-30}}{R(1+\frac{70-q}{q-30})}c_l^A = 40 + \frac{1}{R(1+\frac{70-q}{q-30})}70 + \frac{\frac{70-q}{q-30}}{R(1+\frac{70-q}{q-30})}30$$

(2) Pourquoi peut-on dire que le contrat de future introduit est un produit d'assurance et non un produit d'épargne. (1 point)

Evident : le prix étant payé à la seconde période, les seuls flux monétaires ont lieu à la même période, la seconde période. Par conséquent, le contrat de future ne permet pas de modifier les revenus de l'agent à travers le temps. Il ne constitue donc pas un produit d'épargne. Cependant à la seconde période, l'achat ou la vente d'un tel instrument permet de modifier les revenus de l'agent à travers les différents états du monde, et donc permet par exemple d'augmenter le revenu dans un état où il est initialement faible en consentant à le diminuer dans les états où il est initialement important. L'agent peut donc utiliser cet instrument pour se protéger des fluctuations de son revenu à la seconde période. Le contrat de future constitue bien un produit d'assurance.

(3) Après avoir vérifié que la structure de marché constitué par les deux actifs soit complète, et donc Pareto-optimale, déterminer les prix des deux contrats, i.e. r et q. (Indication : on pourra après une courte justification utiliser certains des résultats de I) (2 points)

Les deux actifs financiers sont l'actif certain et le contrat de future sur actions dont les revenus futurs sont :

$$d_B = \begin{bmatrix} R \\ R \end{bmatrix},\ d_f = \begin{bmatrix} 70-q \\ 30-q \end{bmatrix}$$

Comme $70 - q \neq 30 - q$, le contrat de future est un actif risqué et donc les deux actifs sont linéairement indépendant et engendre l'espace des revenus futurs ($\mathbb{R}^2$).

Comme les marchés sont complets, l'économie est identique, les prix des états sont les mêmes que dans I :

$$\beta_h = \frac{2}{5}\frac{c_0^{AR}}{c_1^{AR}(h)} = \frac{2}{5}\frac{100}{120} = \frac{1}{3}$$

$$\beta_l = \frac{2}{5}\frac{c_0^{AR}}{c_1^{AR}(l)} = \frac{2}{5}\frac{100}{80} = \frac{1}{2}$$

Les prix d'équilibre des deux actifs sont donc donnés par leurs valeurs (déterminées à l'aide des deux β_s). Pour l'actif certain, le coût en 0 étant supposé unitaire, le rendement brut R doit satisfaire l'équation :

$$1 = R\beta_h + R\beta_l \Rightarrow R = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{6}{5},\ r = \frac{1}{5}$$

Pour le contrat de future, le coût en 0 est nul puisque le contrat n'est payé qu'à la seconde période même si le prix est déterminé à la première. Par conséquent l'équation de valorisation pour le contrat de future s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_h(70-q) + \beta_l(30-q) \Rightarrow q = \frac{\beta_h}{\beta_h+\beta_l}70 + \frac{\beta_l}{\beta_h+\beta_l}30 \\ &\Rightarrow q = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}70 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}30 = 46 \end{aligned}$$

Remarque additionnelle : Si l'on reprend la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent A et que l'on considère les deux prix valorisant les consommations contingentes, on peut constater numériquement (et le démontrer plus généralement) qu'ils correspondent aux prix des états.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(1+\frac{70-q}{q-30})} &= \frac{1}{\frac{6}{5}(1+\frac{70-46}{46-30})} = \frac{1}{3} \\ \frac{\frac{70-q}{q-30}}{R(1+\frac{70-q}{q-30})} &= \frac{\frac{70-46}{46-30}}{\frac{6}{5}(1+\frac{70-46}{46-30})} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

14 Contrôle continu de novembre 2004

14.1 Vrai ou faux (5 points)

NB : Les questions doivent être évaluées dans le cadre économique de la théorie de l'équilibre général intertemporel (information parfaite, etc...). 1 réponse fausse = -1.5 points, 2 réponses fausses = -3,5 points, 3 réponses fausses = -5 points

1. La volonté de lisser ses consommations pour un consommateur est d'autant plus forte que ses différentes consommations intertemporelles sont pour lui substituables.
2. Pour une entreprise, une politique de versement régulier et stable des dividendes permet de faire monter la valeur boursière.
3. L'anticipation par un agent d'une augmentation de ses revenus futurs, toutes choses égales par ailleurs, doit conduire à une diminution de l'épargne souhaitée.
4. L'adoption de la maximisation du profit comme critère de décision est la conséquence de la concurrence entre entreprises, indépendamment du fonctionnement des marchés financiers.
5. Lorsque les agents sont patients, un choc favorable de productivité induit nécessairement à l'équilibre un investissement plus important.

14.2 Cours (5 points)

Au choix **un des deux** sujets suivants :

1. Marchés financiers et calcul économique intertemporel (L'exemple des décisions sur les consommations futures ou des décisions d'investissement).
2. Les effets des évolutions des revenus (ou des dotations) et l'ajustement des taux d'intérêt de l'économie.

14.3 Exercice (10 points)

On considère une économie comportant trois périodes $t = 0, 1, 2$ où à chaque période un unique bien non stockable existe. (Ce bien étant unique on prendra 1 comme prix au comptant aux différentes périodes) L'économie est peuplée par trois agents, A, B et C, dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité commune :

$$U = \ln(c_0) + \ln(c_1) + \ln(c_2)$$

A chaque période non terminale t (i.e. 0 et 1) est mis en place un marché financier sur lequel on peut prêter ou emprunter au taux d'intérêt r_{t+1} pour une période. Pour chaque agent i ($i = A, B, C$), on notera c_0^i, c_1^i et c_2^i ses consommations aux différentes périodes.

Les dotations des agents sont supposées être :

	0	1	2
A	0	50	100
B	100	50	0
C	50	50	50

(1) Déterminer pour l'agent A ses contraintes budgétaires à chaque période ainsi que la contrainte budgétaire intertemporelle. (2.5 points).

(2) Pour chaque période $t = 0, 1$, déterminer à quel taux d'intérêt r_{t+1} chaque consommateur va vouloir avoir un profit de consommation stationnaire, croissant, décroissant au cours du temps ? A quelles conditions (sur les dotations), ces profils seront possibles à l'équilibre. (2 points)

(3) Calculer, en justifiant votre méthode, les taux d'intérêt d'équilibre r_1 et r_2. (2 points)

(4) Après avoir calculé la richesse (intertemporelle) de chaque agent à la période initiale 0, déterminer la valeur des consommations de chaque agent à l'équilibre. (NB : le calcul des fonctions de demande n'est pas nécessaire) (1,5 pts)

(5) On suppose qu'un choc modifie les dotations futures de l'agent A. Celles-ci deviennent :

	1	2
A	60	130

et modifient naturellement l'équilibre (et donc les taux d'intérêt). L'agent A décide de fonder une société $A\&\ Co$ dont les revenus seront les dotations futures de A. Le titre est coté en bourse. Déterminer (au nouvel équilibre) la valeur d'équilibre de ce titre. L'émission de ce titre permettra à A d'augmenter sa richesse ? (2 points).

15 Partiel de janvier 2005

15.1 Intitulé

15.1.1 Cours (5 points)

Au choix, une des questions suivantes :

(1) Les conditions d'un partage optimal des risques sur les dotations dans une économie d'échanges.

(2) La prime de risque et l'aversion à l'égard du risque sous l'hypothèse de l'utilité espérée.

(3) Les méthodes de pricing des actifs risqués.

15.1.2 Exercice I (5 points)

On considère une économie à trois états du monde. Deux actifs risqués $j = 1, 2$ donnent comme revenus :

$$d_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \ d_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

et leurs prix sont :

$$q_1 = 10, \ q_2 = 15$$

(1) Peut-on déterminer par arbitrage le taux d'intérêt de l'économie ? (1 point)

(2) Caractérisez les revenus des actifs que l'on peut évaluer par arbitrage. On pourra noter les revenus dans les trois états : $d(1)$, $d(2)$ et $d(3)$. (3 points)

(3) En utilisant les résultats précédents, à quelles conditions pourra-t-on évaluer **n'importe quel actif financier** si l'on rajoute au préalable un troisième actif ? (1 point)

15.1.3 Exercice II (10 points)

L'économie comporte : un bien non stockable pris comme numéraire, deux dates ($t = 0, 1$), deux individus indicés i ($i = A, B$). Aux deux périodes, les deux agents perçoivent des dotations pour consommer mais celles de l'agent A sont à la période 2 des dotations risquées :

	$t = 0$	$t = 1$		
		état 1	*état* 2	*état* 3
A	40	40	60	80
B	60	60	50	40

On suppose que les états ont pour probabilités :

$$\pi_1 = \frac{1}{5},\ \pi_2 = \frac{3}{5},\ \pi_3 = \frac{1}{5}$$

Chaque individu i maximise l'utilité espérée $U_i = \mathbf{E}[\widetilde{u}_i]$ dont l'utilité élémentaire est :

$$\widetilde{u}_i = \ln\left(c_0^i\right) + \frac{5}{6}\ln\left(\widetilde{c}^i\right) \tag{38}$$

où c_0^i est la consommation de la première période, $\widetilde{c}^i$ la consommation aléatoire de la seconde période.

(1) Montrer que l'utilité espérée U_i s'écrit :

$$U_i = \ln(c_0^i) + \frac{1}{6}\ln(c_1^i(1)) + \frac{1}{2}\ln(c_1^i(2)) + \frac{1}{6}\ln(c_1^i(3))$$

où c_0^i est la consommation de la période 0, $c_1^i(s)$ la consommations de la période 1 dans l'état s. (1 point)

(2) On suppose qu'est mis en place un système complet d'actifs élémentaires dont les vecteurs de revenus a_1, a_2, a_3 sont :

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et dont les prix sont notés β_1, β_2 et β_3. Déterminez les prix β_1, β_2 et β_3. (2 points)

(3) Après avoir déterminé les contraintes budgétaires et les fonctions de demandes, déterminer les consommations à l'équilibre de chaque agent. (2 points)

(4) A la place des actifs élémentaires sont mis en place des actions dont les dividendes sont les dotations futures de chaque agent. L'action A et l'action B donnent donc respectivement comme dividendes :

$$d_A = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{bmatrix},\ d_B = \begin{bmatrix} 60 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Les quantités des titres sont normalisées à 1, i.e. la quantité possédé d'un titre est équivalente à la fraction des dividendes auquel on a droit. On note θ_A^i et θ_B^i les parts des dotations de A et B possédées par l'agent i. Avec ces contrats, les dotations de biens et de titres sont initialement les suivantes :

dotations initiales	bien en $t = 0$	*action A*	*action B*
A	40	1	0
B	60	0	1

Caractériser les flux de revenus financiers à la période 1 que l'on peut obtenir (synthétiser) en détenant des portefeuilles des titres A et B. (2 points)

(6) Déterminez s'il est possible d'atteindre à l'aide des seuls actifs financiers A et B un équilibre général optimal. (Plusieurs démonstrations sont possibles. Vous pouvez notamment utiliser vos résultats aux question (3) et (5)). Donnez l'intuition du résultat. Exploitez ce résultat pour déterminer les prix d'équilibre même si l'on est en marchés incomplets. (3 points)

15.2 Eléments de correction

15.2.1 Exercice I

On considère une économie à trois états du monde. Deux actifs risqués $j = 1, 2$ donnent les revenus :

$$d_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix},\ d_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

et leurs prix sont :

$$q_1 = 10,\ q_2 = 15$$

(1) Peut-on déterminer par arbitrage le taux d'intérêt de l'économie ? (1 point)

Oui car $d_1 + d_2$ synthétise l'actif certain :

$$d_1 + d_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.0 \\ 30.0 \\ 30.0 \end{bmatrix}$$

Facultativement : Le coût de ce portefeuille étant $q_1 + q_2 = 25$, son rendement net certain est :

$$r = \frac{d_1(s) + d_2(s)}{q_1 + q_2} - 1 = \frac{30}{25} - 1 = \frac{1}{5}$$

(2) Caractérisez les revenus des actifs que l'on peut évaluer par arbitrage. On pourra noter les revenus dans les trois états : $d(1)$, $d(2)$ et $d(3)$. (3 points)

Pour que le vecteur de revenus $\begin{bmatrix} d(1) & d(2) & d(3) \end{bmatrix}$ puissent être évaluer par arbitrage, il est nécessaire et suffisant que l'on puisse construire un portefeuille des deux actifs 1 et 2 qui synthétise ce vecteur. Si l'on note x et y les quantités des deux actifs, ces deux variables doivent être solutions du système :

$$\begin{cases} 10x + 20y = d(1) \\ 0x + 30y = d(2) \\ 20x + 10y = d(3) \end{cases}$$

Si l'on se restreint à synthétiser les revenus des deux premiers états, le portefeuille doit donc être solution de :

$$\begin{cases} 10x + 20y = d(1) \\ 0x + 30y = d(2) \end{cases}$$

La solution est simplement :

$$y = \frac{d(2)}{30}, \ x = \frac{d(1) - \frac{2}{3}d(2)}{10}$$

La synthèse sera donc possible si et seulement si le portefeuille ainsi constitué permet également de synthétiser $d(3)$, c'est-à-dire vérifie l'équation restante :

$$20x + 10y = d(3)$$

La substitution à x et y de leurs valeurs donnent :

$$20\frac{d(1) - \frac{2}{3}d(2)}{10} + 10\frac{d(2)}{30} = d(3) \Rightarrow 2d(1) = d(3) + d(2)$$

(3) En utilisant les résultats précédents, à quelles conditions pourra-t-on évaluer **n'importe quel actif financier** si l'on rajoute au préalable un troisième actif ? (1 point)

On pourra évaluer par arbitrage n'importe quel troisième actif si celui-ci permet d'avoir une structure complète. Ceci suppose que ce troisième actif n'appartienne pas à l'espace engendré par les actifs 1 et 2, et donc les revenus du troisième actif doivent vérifier :

$$2d_3(1) \neq d(3) + d(2)$$

15.2.2 Exercice sur l'équilibre général

(1) L'utilité espérée U_i s'écrit :

$$\begin{aligned} U_i &= \mathbf{E}\left[u_i(c_0^i, \widetilde{c}_1^i)\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\ln(c_0^i) + \frac{5}{6}\ln(\widetilde{c}_1^i)\right] \\ &= \ln(c_0^i) + \frac{5}{6}\mathbf{E}\left[\ln(\widetilde{c}_1^i)\right] \\ &= \ln(c_0^i) + \frac{5}{6}\left[\frac{1}{5}\ln(c_1^i(1) + \frac{3}{5}\ln(c_2^i(2) + \frac{1}{5}\ln(c_3^i(3)\right] \\ &= \ln(c_0^i) + \frac{1}{6}\ln(c_1^i(1)) + \frac{1}{2}\ln(c_1^i(2)) + \frac{1}{6}\ln(c_1^i(3)) \end{aligned}$$

où c_0^i est la consommation de la période 0, $c_1^i(s)$ la consommations de la période 1 dans l'état s.

(2) On suppose qu'est mis en place un système complet d'actifs élémentaires dont les vecteurs de revenus a_1, a_2, a_3 sont :

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et dont les prix sont notés β_1, β_2 et β_3. Déterminez les prix β_1, β_2 et β_3. (2 points)

L'équilibre général avec un système complet d'actifs élémentaires est un équilibre Pareto-optimal. Les Tms des agents sont donc égalisés entre eux à l'équilibre.

Les agents ont la même fonction d'utilité.

Comme il existe 3 états, deux périodes, et donc 4 biens contingents, pour calculer l'équilibre il est nécessaire de spécifier trois Tms. Si l'on prend comme bien de référence le bien de la période 0, les Tms sont donc :

$$Tms^i_{0\to 1} = \frac{1}{6}\frac{c^i_0}{c^i_1(1)}$$

$$Tms^i_{0\to 2} = \frac{1}{2}\frac{c^i_0}{c^i_1(1)}$$

$$Tms^i_{0\to 3} = \frac{1}{6}\frac{c^i_0}{c^i_1(3)}$$

Les fonctions Tms communes à ces agents sont homogènes de dégré 0. L'optimalité de l'équilibre, l'identité des fonctions d'utilité, l'homogénéité des fonctions Tms assurent qu'il existe un agent représentatif dont la fonction d'utilité est la même que celle des agents, dont la consommation est la somme des consommations des agents.

L'existence de cette agent représentatif dans une économie d'échanges nous permet de calculer rapidement les prix des actifs élémentaires puisque ceux-ci à l'équilibre sont égaux aux Tms de l'agent représentatif (évalués aux points de dotation). Par conséquent :

$$\beta_1 = \frac{1}{6}\frac{60+40}{40+60} = \frac{1}{6}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\frac{60+40}{60+50} = \frac{5}{11}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{6}\frac{60+40}{80+40} = \frac{5}{36}$$

	$t=0$	$t=1$		
		état 1	*état* 2	*état* 3
A	40	40	60	80
B	60	60	50	40

(3) Après avoir déterminé les contraintes budgétaires et les fonctions de demandes, déterminer les consommations à l'équilibre de chaque agent. (2 points)

Pour chaque agent, avec les actifs élémentaires, si l'on note z^i_s la demande nette de l'actif élémentaire de l'état s de l'agent i, alors les contraintes budgétaires de l'agent i s'écrivent simplement :

$$\textit{période } 0 : c^i_0 + \beta_1 z^i_1 + \beta_2 z^i_2 + \beta_3 z^i_3 = \omega^i_0$$

$$\textit{période } 1,\ \textit{état } 1 : c^i_1 = \omega^i_1 + z^i_1$$

$$\textit{période } 1,\ \textit{état } 2 : c^i_2 = \omega^i_2 + z^i_2$$

$$\textit{période } 1,\ \textit{état } 3 : c^i_3 = \omega^i_3 + z^i_3$$

Comme à la seconde période, dans chaque état du monde, on a :

$$z^i_s = c^i_s - \omega^i_s$$

par substitution, on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle suivante :

$$c^i_0 + \beta_1\left(c^i_1 - \omega^i_1\right) + \beta_2\left(c^i_2 - \omega^i_2\right) + \beta_3\left(c^i_3 - \omega^i_3\right) = \omega^i_0$$

ou encore en réarrangeant les termes :

$$c^i_0 + \beta_1 c^i_1 + \beta_2 c^i_2 + \beta_3 c^i_3 = \omega^i_0 + \beta_1\omega^i_1 + \beta_2\omega^i_2 + \beta_3\omega^i_3$$

Pour chaque agent, les demandes sont les solutions du système :

$$\begin{cases} Tms^i_{0\to 1} = \frac{1}{6}\frac{c^i_0}{c^i_1(1)} = \beta_1 \\ Tms^i_{0\to 2} = \frac{1}{2}\frac{c^i_0}{c^i_1(2)} = \beta_2 \\ Tms^i_{0\to 1} = \frac{1}{6}\frac{c^i_0}{c^i_1(1)} = \beta_3 \\ c^i_0 + \beta_1 c^i_1 + \beta_2 c^i_2 + \beta_3 c^i_3 = \omega^i_0 + \beta_1\omega^i_1 + \beta_2\omega^i_2 + \beta_3\omega^i_3 \end{cases}$$

En réarrangeant les conditions marginales on obtient :

$$\begin{cases} c^i_1(1) = \frac{1}{6}\frac{c^i_0}{\beta_1} \\ c^i_1(2) = \frac{1}{2}\frac{c^i_0}{\beta_2} \\ c^i_1(3) = \frac{1}{6}\frac{c^i_0}{\beta_3} \end{cases}$$

et donc en substituant dans la contrainte budgétaire :

$$c^i_0 + \beta_1\frac{1}{6}\frac{c^i_0}{\beta_1} + \beta_2\frac{1}{2}\frac{c^i_0}{\beta_2} + \beta_3\frac{1}{6}\frac{c^i_0}{\beta_3} = \omega^i_0 + \beta_1\omega^i_1 + \beta_2\omega^i_2 + \beta_3\omega^i_3$$

$$c^i_0(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = \omega^i_0 + \beta_1\omega^i_1 + \beta_2\omega^i_2 + \beta_3\omega^i_3$$

$$c^i_0 = \frac{6}{11}\left(\omega^i_0 + \beta_1\omega^i_1 + \beta_2\omega^i_2 + \beta_3\omega^i_3\right)$$

En reprenant les relations entre les consommations futures et la consommation présente, on trouve les fonctions de demande pour les biens de la période 1 :

$$\begin{cases} c^i_1(1) = \frac{1}{11}\frac{\omega^i_0+\beta_1\omega^i_1+\beta_2\omega^i_2+\beta_3\omega^i_3}{\beta_1} \\ c^i_1(2) = \frac{3}{11}\frac{\omega^i_0+\beta_1\omega^i_1+\beta_2\omega^i_2+\beta_3\omega^i_3}{\beta_2} \\ c^i_1(3) = \frac{1}{11}\frac{\omega^i_0+\beta_1\omega^i_1+\beta_2\omega^i_2+\beta_3\omega^i_3}{\beta_3} \end{cases}$$

Connaissant les prix des actifs élémentaires et les dotations des agents :

	$t=0$	$t=1$			*richesse*	*part*
		état 1	*état* 2	*état* 3		
A	40	40	60	80	85.051	0.464
B	60	60	50	40	98.283	0.536
prix	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{22}$	$\frac{5}{36}$		

on en déduit la valeur des consommations à l'équilibre pour l'agent A :

$$\begin{cases} c^A_0 = \frac{6}{11}\left(40 + \frac{1}{6}40 + \frac{10}{22}60 + \frac{5}{36}80\right) = \frac{16\,840}{363} = 46.391 \\ c^A_1(1) = \frac{1}{11}\frac{40+\frac{1}{6}40+\frac{10}{22}60+\frac{5}{36}80}{\frac{1}{6}} = \frac{16\,840}{363} = 46.391 \\ c^A_1(2) = \frac{3}{11}\frac{40+\frac{1}{6}40+\frac{10}{22}60+\frac{5}{36}80}{\frac{10}{22}} = \frac{1684}{33} = 51.03 \\ c^A_1(3) = \frac{1}{11}\frac{40+\frac{1}{6}40+\frac{10}{22}60+\frac{5}{36}80}{\frac{5}{36}} = \frac{6736}{121} = 55.669 \end{cases}$$

et pour l'agent B :

$$\begin{cases} c^B_0 = \frac{6}{11}\left(60 + \frac{1}{6}60 + \frac{10}{22}50 + \frac{5}{36}40\right) = \frac{19\,460}{363} = 53.609 \\ c^B_1(1) = \frac{1}{11}\frac{60+\frac{1}{6}60+\frac{10}{22}50+\frac{5}{36}40}{\frac{1}{6}} = \frac{19\,460}{363} = 53.609 \\ c^B_1(2) = \frac{3}{11}\frac{60+\frac{1}{6}60+\frac{10}{22}50+\frac{5}{36}40}{\frac{10}{22}} = \frac{1946}{33} = 58.970 \\ c^B_1(3) = \frac{1}{11}\frac{60+\frac{1}{6}60+\frac{10}{22}50+\frac{5}{36}40}{\frac{5}{36}} = \frac{7784}{121} = 64.331 \end{cases}$$

(4) A la place des actifs élémentaires sont mis en place des actions dont les dividendes sont les dotations futures de chaque agent. L'action A et l'action B donnent donc respectivement comme dividendes :

$$d_A = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{bmatrix},\ d_B = \begin{bmatrix} 60 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Les quantités des titres sont normalisées à 1, i.e. la quantité possédé d'un titre est équivalente à la fraction des dividendes auquel on a droit. On note θ^i_A et θ^i_B les parts des dotations de A et B possédées par l'agent i. Avec ces contrats, les dotations de biens et de titres sont initialement les suivantes :

dotations initiales	bien en $t = 0$	*action A*	*action B*
A	40	1	0
B	60	0	1

Caractériser les flux de revenus financiers à la période 1 que l'on peut obtenir (synthétiser) en détenant des portefeuilles des titres A et B. (2 points)

Si l'on note $w(1)$, $w(2)$, $w(3)$ les revenus de la seconde période, un portefeuille contenant x actions de A, y actions de B donnent les revenus :

$$d_A = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{bmatrix}, \; d_B = \begin{bmatrix} 60 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 40x + 60y \\ 60x + 50y \\ 80x + 40y \end{cases}$$

et donc pour que l'on obtienne $[w(1), w(2), w(3)]$, il est nécessaire de construire le portefeuille :

$$\begin{cases} 40x + 60y = w(1) \\ 60x + 50y = w(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 80y = 3w(1) - 2w(2) \\ 160x = 6w(2) - 5w(1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3w(1)-2w(2)}{80} \\ x = \frac{6w(2)-5w(1)}{160} \end{cases}$$

Ce portefeuille synthétisera le profil de revenu souhaité si son revenu dans l'état 3 est égal à $w(3)$. Ceci impose que :

$$\begin{aligned} w(3) &= 80x + 40y \\ &= 80\frac{6w(2) - 5w(1)}{160} + 40\frac{3w(1) - 2w(2)}{80} \\ &= 3w(2) - \frac{5}{2}w(1) + \frac{3}{2}w(1) - w(2) \\ &= 2w(2) - w(1) \end{aligned}$$

et donc les seuls profils de revenus que l'on peut synthétiser sont :

$$w(2) = \frac{w(1) + w(3)}{2}$$

(6) Déterminez s'il est possible d'atteindre à l'aide des seuls actifs financiers A et B un équilibre général optimal. (Plusieurs démonstrations sont possibles. Vous pouvez notamment utiliser vos résultats aux question (3) et (5)). Donnez l'intuition du résultat. Exploitez ce résultat pour déterminer les prix d'équilibre même si l'on est en marchés incomplets. (3 points).

Si l'équilibre avec actifs financiers est optimal, nécessairement (en supposant l'unicité de l'équilibre) les consommations seront les mêmes que celles de l'équilibre avec système complet d'actifs élémentaires.

Avec les actions, les seuls revenus des agents à la seconde période sont les revenus engendrés par leurs portefeuilles. Si l'on doit atteindre les consommations déterminés plus haut, il est donc nécessaire que les revenus financiers soient égaux aux consommations (= valeurs des consommations dans le modèle avec bien unique). Par conséquent, les consommations doivent vérifier l'équation donnée plus haut :

$$c^i_1(2) = \frac{c^i_1(1) + c^i_1(3)}{2}$$

On vérifie que ceci est bien le cas pour les deux agents :

$$c^A_1(2) = 51.03, \; \frac{c^A_1(1) + c^A_1(3)}{2} = \frac{46.391 + 55.669}{2} = 51.03$$

$$c^B_1(2) = 58.970, \; \frac{c^B_1(1) + c^B_1(3)}{2} = \frac{53.609 + 64.331}{2} = 58.97$$

Autre réponse possible : Sans utiliser le résultat de la question précédente, on peut vérifier qu'il existe un portefeuille qui donne les consommations demandées sous les trois contraintes budgétaires de la période 1. Formellement, dans le cas présent, ceci revient à étudier à nouveau le système de la question précédente.

L'intuition du résultat est que pour être un optimum l'équilibre financier doit permettre un partage optimal des risques. Celui-ci (pour les fonctions d'utilité les plus courantes) passent par un partage (linéaire) des ressources. Ces dernières étant le support des titres, acheter un portefeuille symétrique (une part α identique du titre A et du titre B) revient à s'acheter une part α de ces dotations. Donc l'optimalité de l'équilibre.

L'équilibre étant un optimum, les prix personnalités β_s^i qu'utilisent les agents pour évaluer les actifs financiers (= Tms) :

$$q_j = \sum_s \beta_s^i d_j(s)$$

sont donnés par les Tms de l'agent représentatif. Par conséquent les prix des titres sont :

$$q_A = \frac{1}{6}(40) + \frac{10}{22}(60) + \frac{5}{36}(80) = 45.051$$

$$q_B = \frac{1}{6}(60) + \frac{10}{22}(50) + \frac{5}{36}(40) = 38.283$$