

Notes sur les rendements de actifs financiers

Philippe Bernard

Ingénierie Economique & Financière

Université Paris-Dauphine

Février 2006

Table des matières

1	Correction des splits	2
2	Correction des dividendes	6
3	Rentabilités arithmétique et géométrique	13

La cotation des actions sur les marchés organisés permet aux investisseurs de disposer d'une information quasiment en continue sur les cours caractérisant ces titres sur les marchés. Face à cette fluidité des cotations des actions (et d'autres titres financiers), à la profusion des cotations, il est nécessaire de trouver des résumés. Ainsi, par exemple, en raison de l'impossible de reporter les cours d'un titre cotés au cours d'une journée en continu, l'information reportée se contentera en général de résumer la journée de cotation d'un titre par quatre cours :

- le cours à l'ouverture du marché ;
- le cours à la clôture du marché ;
- le cours le plus haut observé au cours de la séance ;
- le cours le plus bas observé au cours de la séance.

La figure 2 reproduit ainsi les cours quotidiens reportés pour l'action Microsoft par Yahoo! Finance (à partir de données fournies par Reuters). Le cours le plus souvent utilisé est le cours à la clôture.

1 Correction des splits

Comme on peut le voir, à côté des cours effectifs, figurent les volumes des transactions sur ce titre au cours des différentes périodes, et des cours ajustés (*adjusted close prices*). Ces cours ajustés traduisent la nécessité pour les investisseurs de prendre en compte les opérations sur titres (OST).

Ces OST sont essentiellement les versements de dividendes ou les divisions d'actions (*splits* en anglais). La raison d'être des splits est que le montant minimum que représente un titre découle d'un arbitrage entre la liquidité du placement pour les investisseurs et les coûts de gestion pour les entreprises émettrices. En raison de ces derniers, les sociétés sont souvent amenés à limiter le nombre des actions émises. Ceci a pour effet d'augmenter la valeur unitaire des titres et de limiter naturellement la divisibilité des ajustements possibles des investissements par les ménages. Aussi, fréquemment, en période de forte augmentation de la valeur des titres, pour rendre plus divisible les investissements dans leurs titres, les entreprises sont conduites à pratiquer des divisions de titres (*splits*).

L'existence des OST conduisent les investisseurs à corriger de ces ajustements techniques les cours qu'ils utilisent dans leurs calculs économiques. En effet, pour ces acteurs des marchés financiers, les cours ont essentiellement comme finalité de donner une information sur l'évolution de la valeur des investissements réalisés. Si on suppose que les seuls

FIG. 1 – Les opérations sur titres sur l'action Microsoft depuis son entrée sur le marché
 (source : Yahoo Finance)

SET DATE RANGE

Start Date: Eg. Jan 1, 2003
 End Date:

- Daily
- Weekly
- Monthly
- Dividends Only

Get Prices

[First](#) | [Prev](#) | [Next](#) | [Last](#)

PRICES

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close*
23-Aug-04				\$ 0.08 Cash Dividend		
15-Oct-03				\$ 0.16 Cash Dividend		
19-Feb-03				\$ 0.08 Cash Dividend		
18-Feb-03				2 : 1 Stock Split		
29-Mar-99				2 : 1 Stock Split		
23-Feb-98				2 : 1 Stock Split		
9-Dec-96				2 : 1 Stock Split		
23-May-94				2 : 1 Stock Split		
15-Jun-92				3 : 2 Stock Split		
27-Jun-91				3 : 2 Stock Split		
16-Apr-90				2 : 1 Stock Split		
21-Sep-87				2 : 1 Stock Split		

* Close price adjusted for dividends and splits.

FIG. 2 – Un exemple de cotation sur Yahoo Finance : l'action Microsoft de mai 2002 à octobre 2004 (en données mensuelles).

SET DATE RANGE

Start Date: Eg. Jan 1, 2003

End Date:

- Daily
- Weekly
- Monthly
- Dividends Only

Get Prices

First | Prev | [Next](#) | [Last](#)

PRICES

Date	Open	High	Low	Close	Avg Vol	Adj Close*
Oct-04	27.82	28.59	27.78	28.06	60,096,628	28.06
Sep-04	27.23	27.79	26.74	27.65	57,725,252	27.65
23-Aug-04	\$ 0.08 Cash Dividend					
Aug-04	28.27	28.55	26.85	27.30	52,104,636	27.30
Jul-04	28.70	29.89	27.25	28.49	76,666,657	28.41
Jun-04	26.13	28.80	25.86	28.56	77,068,290	28.48
May-04	26.19	26.60	25.42	26.23	58,942,495	26.15
Apr-04	24.95	27.72	24.85	26.13	77,386,665	26.05
Mar-04	26.63	26.72	24.01	24.93	77,111,922	24.86
Feb-04	27.61	27.80	26.35	26.53	57,385,900	26.45
Jan-04	27.58	28.83	27.26	27.65	63,635,885	27.57
Dec-03	25.90	27.55	25.50	27.37	69,030,008	27.29
Nov-03	26.35	26.75	24.84	25.71	77,670,488	25.63
15-Oct-03	\$ 0.16 Cash Dividend					
Oct-03	28.03	29.46	25.91	26.14	63,898,095	26.06
Sep-03	26.70	30.00	26.47	27.80	62,697,275	27.56
Aug-03	26.33	26.95	25.43	26.52	47,667,137	26.29
Jul-03	25.59	27.81	25.39	26.41	61,659,808	26.19
Jun-03	24.98	26.51	23.60	25.64	77,050,900	25.42
May-03	25.54	26.50	23.89	24.61	66,480,971	24.40
Apr-03	24.46	26.43	23.95	25.57	62,151,643	25.35
Mar-03	24.02	26.80	22.55	24.21	68,727,932	24.00
19-Feb-03	\$ 0.08 Cash Dividend					
18-Feb-03	2 : 1 Stock Split					
Feb-03	47.93	49.10	23.30	23.70	52,416,910	23.50
Jan-03	52.30	57.32	47.03	47.46	43,464,776	23.45
Dec-02	58.65	58.96	51.26	51.70	31,585,214	25.55
Nov-02	52.43	58.64	51.90	57.68	39,609,754	28.50

TAB. 1 – L’impact d’un split sur le cours et sur la valeur de l’investissement

	cours (€)	split	nombre de titres	valeur de l’invest.	cours ajusté
période d’investissement	200		5 000	1 000 000	200
avant le split	300		5 000	1 500 000	300
après le split	150	2 :1	10 000	1 500 000	300

OST sont les splits, ceux-ci vont entraîner un ajustement des cours mais pas de la valeur des investissements comme l’illustre le tableau 1. L’investissement initial est de 10^6e et consiste à investir dans un titre dont la valeur initiale est de $200e$. La valeur de ce titre augmente jusqu’à une période où a lieu un split consistant à doubler le nombre des actions. Le dernier cours avant la réalisation du split est de $300e$ et le split est supposé entraîner une division par 2 du cours. Cependant, le split n’affecte pas la valeur de l’investissement qui est toujours de $1\,500\,000e$ après le split. Le cours effectif du titre est donc un très mauvais indicateur de la valeur de son placement pour l’investisseur.

Le cours ajusté (reporté dans la dernière colonne) devrait laisser invariant la valeur unitaire du titre. La méthode utilisée consiste à appliquer des coefficients correcteurs qui permettent de convertir les cours observés des actions modifiées par les splits en cours des actions initiales (et inversement) comme l’on convertit des montants en euros en montants en francs français, voire en anciens francs français ! Le préalable est déterminer un coefficient correcteur. Celui est en fait le ratio défini par le dernier cours avant le split et le cours qu’aurait du atteindre le titre en l’absence d’autres influences que le split. Ce dernier cours est le cours dit théorique et donc le coefficient correcteur à appliquer aux “nouvelles actions” peut être écrit :

$$\text{coefficient correcteur} = \frac{\text{cours avant le split}}{\text{cours théorique après le split}}$$

Si le contexte financier est stable, dénué de toute autre choc pour la valeur du titre, le cours théorique pourra être la dernière valeur avant le split divisée par le ratio du split (par exemple 2 dans notre exemple). Selon que l’on désire suivre l’évolution du cours ajusté de l’action dans laquelle on a investi ou se faire une idée du cours passé équivalent de l’action que l’on observe (après le split), on pratiquera à l’aide de ces coefficients des corrections vers l’aval ou vers l’amont. Le tableau 2 donne deux exemples de ces deux corrections.

TAB. 2 – Corrections du cours vers l’amont et vers l’aval.

	cours eff (€)	split	coeff. correcteur	cours ajusté (corr vers l’aval)	cours ajusté (corr vers l’amont)
invest.	200		1	200	100
avant le split	300		1	300	150
après le split	150	2 :1	2	300	150

TAB. 3 – La correction du split et du dividende vers l’aval

	cours (€)	split	divid.	coeff. corr.	cours aj. (sans div.)	div. corr.	cours aj. (avec div.)
invest.	200			1	200		200
avant le split	300			1	300		300
après le split	150	2 :1	15	2	300	30	330

2 Correction des dividendes

Le versement des dividendes conduit également à corriger les cours effectifs des titres. En effet, le dividende est avec le cours auquel on peut vendre le titre un des “gains” de l’investissement. Si le cadre ne comportait que deux périodes, la période de réalisation de l’investissement et la période de revente du titre, la correction à apporter serait simple : elle consisterait à ajouter au cours (corrigé des splits) le dividende (corrigé lui aussi). Ainsi, dans le cas de l’exemple précédent, si le versement d’un dividende de 15€ par action donnera lieu aux corrections (vers l’aval) du tableau 3.

S’il existe plusieurs périodes, on peut se contenter de réaliser cet ajustement période par période. Mais on peut aussi procéder à d’autres ajustements plus complexes mais aussi plus judicieux lorsque l’on veut évaluer le résultat d’une stratégie d’investissement sur le titre considéré. Dans ce cas, le cours ajusté (corrigé vers l’aval) devrait donner une estimation de la valeur d’un investissement unitaire jusqu’à sa période de réalisation (= liquidation). Dans ce contexte, le dividende est un revenu que l’on peut réinvestir et qui peut donc ainsi augmenter les revenus engendrés par l’investissement. Le problème délicat est alors de déterminer le rendement du réinvestissement. Concrètement, on peut notamment envisager un réinvestissement en cash peu risqué mais dont le rendement sera quasiment nul ou un réinvestissement dans le titre. Théoriquement, la correction à apporter devrait dépendre de la nature du réinvestissement des dividendes. Pour illustrer le

FIG. 3 – Les opérations sur titres d’Axa, 1985-2004 (source : Yahoo finance)

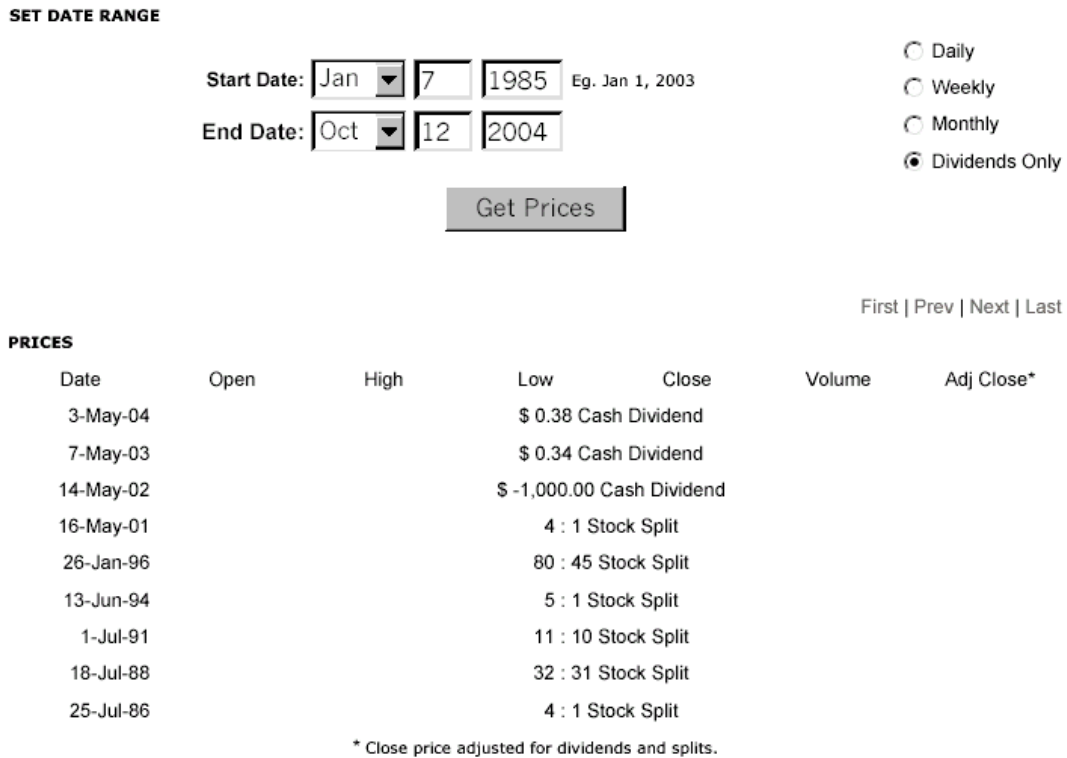


FIG. 4 – Les opérations sur titres de Michelin, 1985-2004 (source : Yahoo finance)

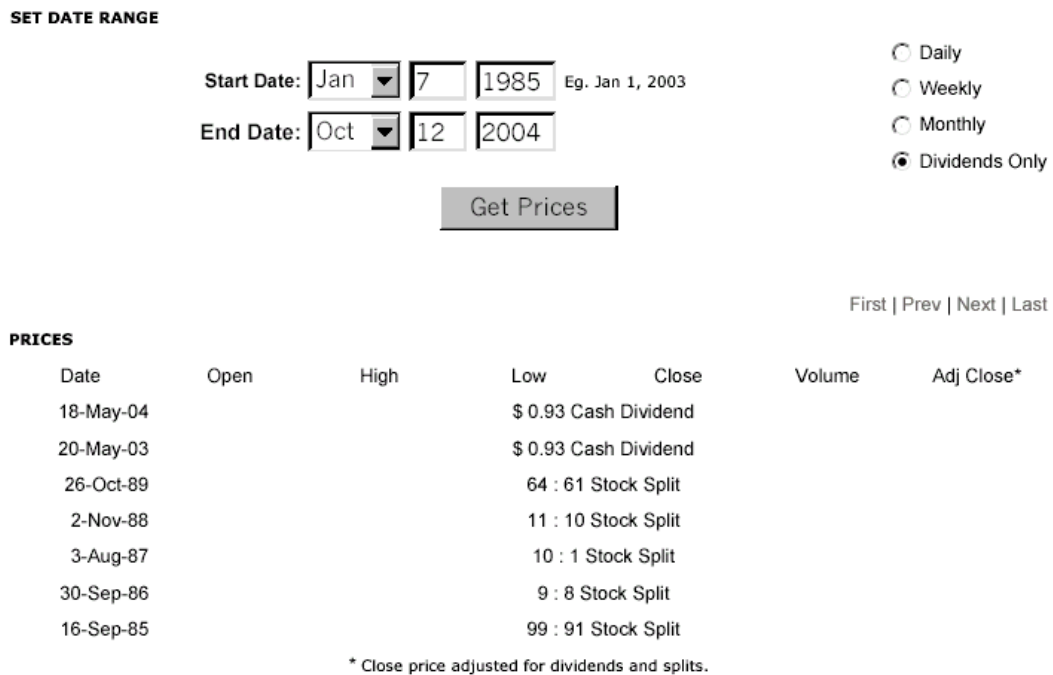


FIG. 5 – Les opérations sur titres de Danone, 1985-2004 (source : Yahoo finance)

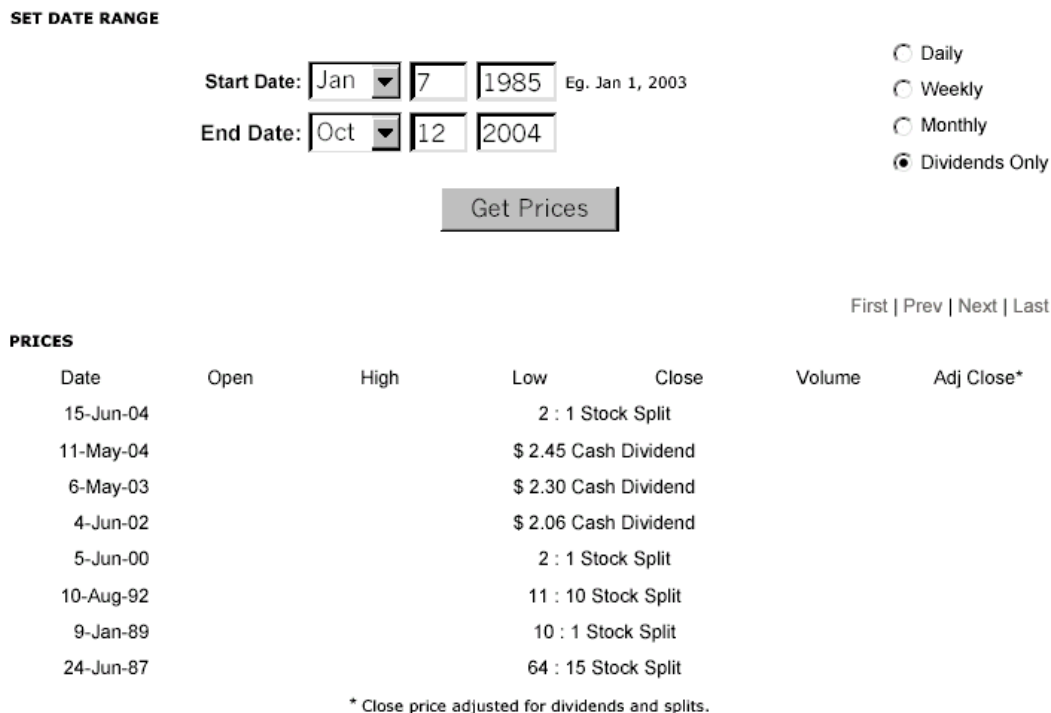


FIG. 6 – Les opérations sur titres de l'Oréal, 1985-2004 (source : Yahoo finance)

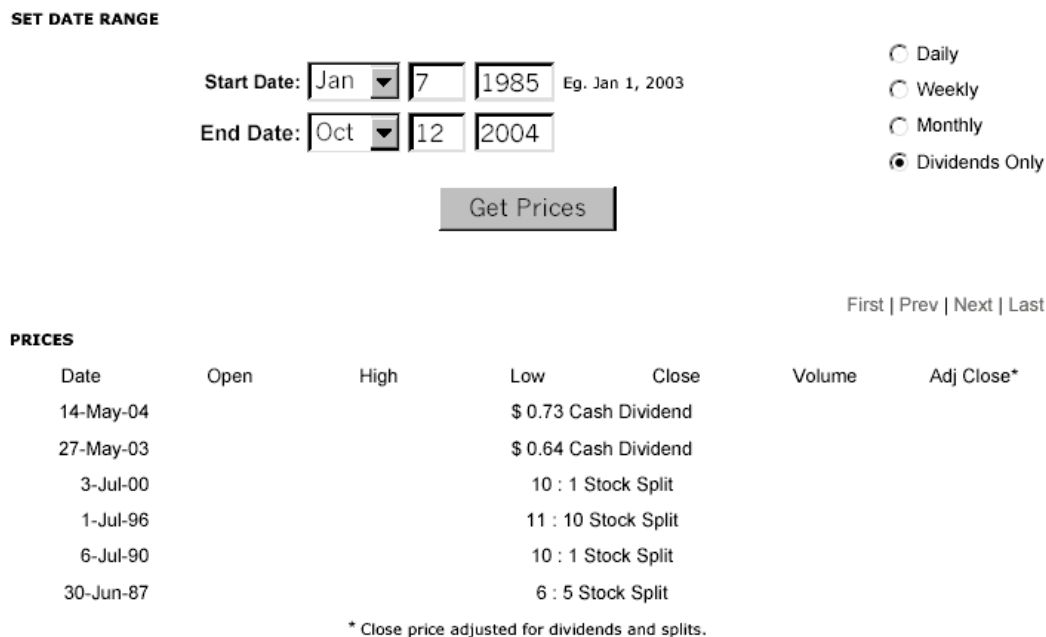


FIG. 7 – Les opérations sur titres de Peugeot, 1985-2004 (source : Yahoo finance)

SET DATE RANGE

Start Date: Jan 7 1985 Eg. Jan 1, 2003

End Date: Oct 12 2004

Daily
 Weekly
 Monthly
 Dividends Only

Get Prices

First | Prev | Next | Last

PRICES

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close*
2-Jun-04				\$ 1.35 Cash Dividend		
4-Jun-03				\$ 1.35 Cash Dividend		
22-May-02				\$ 1.15 Cash Dividend		
2-Jul-01				6 : 1 Stock Split		
6-Jul-95				\$ 6.00 Cash Dividend		
5-Jul-93				\$ 10.00 Cash Dividend		
24-Jul-89				2 : 1 Stock Split		
15-Jul-87				6 : 5 Stock Split		

* Close price adjusted for dividends and splits.

problème, considérons un investisseur réalisant un investissement de 10^6 e pour 4 périodes (par exemple 4 trimestres) dans un titre qui ne connaîtra pas de splits mais les versements de 1e de dividendes aux périodes 1 et 3.

La correction à adopter devrait alors dépendre de l'utilisation que pourrait faire l'investisseur des dividendes jusqu'à la réalisation de l'investissement sur le titre. On peut envisager diverses hypothèses : le réinvestissement du dividende dans le titre, le réinvestissement dans un actif monétaire à taux d'intérêt de 2% annuel, voire le réinvestissement en cash (à un taux de rendement nul). Les corrections à adopter vont varier selon l'hypothèse

TAB. 4 – Cours et versements des dividendes dans un cadre multipériodes.

	cours (€)	divid.	inv.	nbre titres
0	100	0	10^6	10 000
1	102.5	1		
2	105	0		
3	107.5	1		
4	110	0	$-1.1 \cdot 10^6$	

FIG. 8 – Les opérations sur titres de Dupont de Nemours, 1999-2004 (source : Yahoo finance)

SET DATE RANGE

Start Date: Jan 7 1985 Eg. Jan 1, 2003
 End Date: Oct 12 2004

- Daily
- Weekly
- Monthly
- Dividends Only

Get Prices

First | Prev | [Next](#) | [Last](#)

PRICES

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close*
11-Aug-04				\$ 0.35 Cash Dividend		
12-May-04				\$ 0.35 Cash Dividend		
11-Feb-04				\$ 0.35 Cash Dividend		
12-Nov-03				\$ 0.35 Cash Dividend		
13-Aug-03				\$ 0.35 Cash Dividend		
13-May-03				\$ 0.35 Cash Dividend		
12-Feb-03				\$ 0.35 Cash Dividend		
13-Nov-02				\$ 0.35 Cash Dividend		
13-Aug-02				\$ 0.35 Cash Dividend		
13-May-02				\$ 0.35 Cash Dividend		
13-Feb-02				\$ 0.35 Cash Dividend		
13-Nov-01				\$ 0.35 Cash Dividend		
13-Aug-01				\$ 0.35 Cash Dividend		
11-May-01				\$ 0.35 Cash Dividend		
13-Feb-01				\$ 0.35 Cash Dividend		
13-Nov-00				\$ 0.35 Cash Dividend		
11-Aug-00				\$ 0.35 Cash Dividend		
11-May-00				\$ 0.35 Cash Dividend		
11-Feb-00				\$ 0.35 Cash Dividend		
10-Nov-99				\$ 0.35 Cash Dividend		
11-Aug-99				\$ 0.35 Cash Dividend		
12-May-99				\$ 0.35 Cash Dividend		
10-Feb-99				\$ 0.35 Cash Dividend		

FIG. 9 – Les opérations sur titres de General Electric, 1999-2004 (source : Yahoo finance)

SET DATE RANGE

Start Date: Jan 2 1962 Eg. Jan 1, 2003
 End Date: Oct 12 2004

- Daily
- Weekly
- Monthly
- Dividends Only

Get Prices

First | Prev | [Next](#) | [Last](#)

PRICES

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close*
23-Sep-04				\$ 0.20 Cash Dividend		
24-Jun-04				\$ 0.20 Cash Dividend		
26-Feb-04				\$ 0.20 Cash Dividend		
29-Dec-03				\$ 0.20 Cash Dividend		
25-Sep-03				\$ 0.19 Cash Dividend		
26-Jun-03				\$ 0.19 Cash Dividend		
26-Feb-03				\$ 0.19 Cash Dividend		
27-Dec-02				\$ 0.19 Cash Dividend		
25-Sep-02				\$ 0.18 Cash Dividend		
26-Jun-02				\$ 0.18 Cash Dividend		
27-Feb-02				\$ 0.18 Cash Dividend		
27-Dec-01				\$ 0.18 Cash Dividend		
26-Sep-01				\$ 0.16 Cash Dividend		
5-Jul-01				\$ 0.16 Cash Dividend		
5-Mar-01				\$ 0.16 Cash Dividend		
27-Dec-00				\$ 0.16 Cash Dividend		
29-Sep-00				\$ 0.137 Cash Dividend		
5-Jul-00				\$ 0.137 Cash Dividend		
8-May-00				3 : 1 Stock Split		
6-Mar-00				\$ 0.41 Cash Dividend		
22-Dec-99				\$ 0.41 Cash Dividend		
28-Sep-99				\$ 0.35 Cash Dividend		
6-Jul-99				\$ 0.35 Cash Dividend		
4-Mar-99				\$ 0.35 Cash Dividend		

TAB. 5 – Ajustements des cours aux dividendes en fonction des réinvestissements.

	cours (€)	divid.	réinvestissement dans le titre			réinvestissement monétaire		
			coef corr	cumul	cours ajust.	inv. mon.	val. inv. monétaire	cours ajust.
0	100	0	1	1	100	0	0	100
1	102.5	1	$1 + \frac{1}{102.5}$	1.0098	103.5	1	1	101
2	105	0	1	1.0098	106.03	0	1.005	106.005
3	107.5	1	$1 + \frac{1}{107.2}$	1.0192	109.56	1	2.01	109.51
4	110	0	1	1.0192	112.11	0	2.02	112.02

adopté sur le réinvestissement.

Comme le montre le graphique 5, lorsque le réinvestissement est dans le titre considéré, l'ajustement est très similaire à celui envisagé dans le cas des splits. En effet, il consiste à cumuler la croissance de l'investissement réalisé à chaque période, i.e. $1 + \frac{\text{dividende}}{\text{cours}}$. L'ajustement à opérer dans le cas du réinvestissement monétaire passe par la comptabilisation du montant monétaire à chaque période et au calcul de sa valeur à la période suivante du fait de la capitalisation au taux d'intérêt composé $\frac{1}{4}2\%$ et des nouveaux investissements :

$$m_{t+1} = m_t(1 + \frac{1}{4}2\%) + i_{t+1}$$

où i_{t+1} est le nouveau réinvestissement des dividendes sur le marché monétaire, m_t la valeur en t du stock d'actifs monétaires.

L'importance de la correction des dividendes (et de la méthode sélectionnée) dépend largement de l'horizon analysé et du titre sélectionné. Comme les exemples de Microsoft (figure 1), d'Axa (figure 3), de Michelin (4), de Danone (figure 5), de l'Oréal (6) et de Peugeot (figure 7) le montrent, il est courant de trouver des entreprises où sur une période de 20 ans, on ne compte que quelques versements de dividendes. Les sociétés qui versent des dividendes à des intervalles extrêmement rapprochés, comme Dupont de Nemours (figure 8) et General Motors (figure 9) aux Etats-Unis, sont plus l'exception que la règle. Aussi, si l'on considère à court-terme les marchés financiers, négliger de prendre en compte les dividendes, ne conduit pas dans la très grande majorité des cas, à des erreurs importantes. Une des méthodes de correction des dividendes les plus souvent utilisées est celle supposant le réinvestissement des dividendes dans le titre. Mais couramment on ignore aussi le problème du réinvestissement en adoptant la méthode de correction statique.

Remarque 1 On trouvera une vaste collection d'exemples concrets de tels ajustements et des exercices dans le chapitre 1 de l'ouvrage de Jacques Hamon [2004] "Bourse et gestion de portefeuille" [Ham04].

3 Rentabilités arithmétique et géométrique

Le cadre temporel adopté sera un cadre discret où les transactions seront supposées ne pouvoir lieu qu'à certains moments (et non en temps continu). Ces périodes de transaction seront notées $t = 0, 1, 2, \dots$ et à ces périodes on constatera à la fois les valeurs des cours (corrigés des splits) q_t et des dividendes d_t (corrigés eux-aussi si nécessaire). La convention courante dans ce cadre discret sur ces derniers est qu'en chaque période t , seuls les actionnaires détenant le titre ou venant de le vendre en t ont pu percevoir d_t (et jamais les investisseurs qui viennent de l'acheter). Avec cette convention, si l'investisseur s'intéresse au taux de rentabilité d'un investissement d'une période (de t à $t + 1$) alors le taux de rentabilité (ordinaire) sera donné par :

$$r_{t+1} = \frac{(q_{t+1} + d_{t+1}) - q_t}{q_t} \quad (1)$$

Ce taux de rentabilité peut être décomposé en deux composantes :

– la plus value du titre

$$\frac{q_{t+1} - q_t}{q_t}$$

– le rendement du titre (ou *dividend yield*)

$$\frac{d_{t+1}}{q_t}$$

Par abus de langage, on parlera fréquemment de rendement (ou de rendement net) pour désigner le taux de rentabilité, de rendement brut pour désigner $1 + r_t$. Dans le cadre multipériode, dès lors que l'investisseur sera amené à s'intéresser au rendement d'un investissement comportant plusieurs périodes de réinvestissements, on sera amené à ne considérer que la série des cours ajustés pour les splits et les réinvestissements des dividendes puisque ce qui intéresse finalement l'investisseur sera l'évolution de la valeur de son investissement. Aussi, si $\{q_t : t = t_0, \dots, t_0 + T\}$ est la série des cours ajustés d'un investissement durant T périodes et réalisés en t_0 alors les différents taux de rentabilité (ou rendements) sera défini par :

$$r_{t+1} = \frac{q_{t+1} - q_t}{q_t} \quad (2)$$

Comme le résultat des réinvestissements des dividendes seront la conséquence des dividendes et de la plus value obtenue sur les réinvestissements de ces derniers, il sera alors parfois difficile de séparer strictement plus value et *dividend yield*.

Les taux de rentabilité ainsi calculés sont qualifiés de géométriques en raison de la manière dont on doit en calculer le taux de rentabilité moyen. Supposons en effet que sur T périodes, on ait les taux suivants $\{r_{t+1} : t = t_0, \dots, t_0 + T - 1\}$ alors le taux de rentabilité moyen vérifie la relation :

$$(1 + r_{t_0, t_0+T})^T = \frac{q_{t_0+T}}{q_{t_0}}$$

Comme :

$$\begin{aligned} \frac{q_{t_0+T}}{q_{t_0}} &= \frac{q_{t_0+T}}{q_{t_0+T-1}} \frac{q_{t_0+T-1}}{q_{t_0+T-2}} \dots \frac{q_{t_0+2}}{q_{t_0+1}} \frac{q_{t_0+1}}{q_{t_0}} \\ &= (1 + r_T)(1 + r_{T-1}) \dots (1 + r_{t_0+2})(1 + r_{t_0+1}) \end{aligned}$$

on a donc :

$$(1 + r_{t_0, t_0+T})^T = (1 + r_T)(1 + r_{T-1}) \dots (1 + r_{t_0+2})(1 + r_{t_0+1})$$

ou encore :

$$(1 + r_{t_0, t_0+T}) = [(1 + r_T)(1 + r_{T-1}) \dots (1 + r_{t_0+2})(1 + r_{t_0+1})]^{1/T}$$

Le rendement brut moyen $(1 + r_{t_0, t_0+T})$ est donc la moyenne géométrique des rendements bruts ds différentes T périodes. Par conséquent, le taux de rentabilité moyen sur les T périodes est donc :

$$r_{t_0, t_0+T} = \left(\prod_{\tau=1}^T (1 + r_{t_0+\tau}) \right)^{1/T} \quad (3)$$

A côté de ces taux de rentabilités arithmétiques (habituels) existent des taux de rentabilité géométrique dont la logique est celle des intérêts composés.

En effet, supposons que l'on puisse subdiviser nos périodes (par exemple l'année) en N sous-périodes (par exemple les mois, les semaines, les jours, etc.). Les agents vont alors sur chaque titre faire des opérations d'investissement et de réinvestissement au cours de ces différentes sous-périodes. Si le taux de rentabilité annualisé de ces opérations est r alors le résultat de N opérations successives d'investissement et de réinvestissement de t à $t + 1$ sera d'après les résultats donnés plus haut de multiplier l'investissement initial par :

$$\left(1 + \frac{r}{N}\right)^N$$

Si r_{t+1} est le taux de rentabilité de t à $t + 1$ naturellement ces N opérations définiront un taux de croissance qui devra être égal à $1 + r_{t+1}$, et donc on doit avoir :

$$\left(1 + \frac{r}{N}\right)^N = 1 + r_{t+1} \quad (4)$$

Par imitation du taux d'intérêt composé, le taux r peut être qualifié de taux de rentabilité composé. A chaque subdivision (mensuelle, hebdomadaire, quotidienne, etc.) correspond un taux de rentabilité composé. La limite d'un tel processus de subdivision définit par contre un unique taux, le taux de rentabilité continu.

Lorsque N tend vers l'infini, on sait que la fonction $(1 + \frac{x}{N})^N$ tend vers $\exp(x)$. Par conséquent, si N tend vers l'infini, la limite des taux de rentabilité composé est donné par la solution r_c de l'équation :

$$\exp(r_c(t, t + 1)) = 1 + r_{t+1}$$

Naturellement, si $\{q_t\}$ est la série de cours corrigés disponibles, alors ce taux continu sera donné par :

$$r_c(t, t + 1) = \ln\left(\frac{q_{t+1}}{q_t}\right) \quad (5)$$

Le rendement continu a une propriété qui le rend très maniable : il est additif. En effet, si l'on s'intéresse non pas au rendement continu du marché en 2006, mais au rendement continu de 2000 à 2006, il suffira de faire la moyenne arithmétique des rendements continus des différents années. En effet, comme le taux continu ("annualisé") $r_c(t, t + T)$ est défini par :

$$\exp(r_c(t, t + T) \times T) = \frac{q_{t+T}}{q_t} \Rightarrow r_c(t, t + T) = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{q_{t+T}}{q_t}\right)$$

et donc :

$$\begin{aligned} r_c(t, t + T) &= \frac{1}{T} \ln\left(\frac{q_{t+T}}{q_t}\right) \\ &= \frac{1}{T} \ln\left(\frac{q_{t+T}}{q_{t+T-1}} \frac{q_{t+T-2}}{q_{t+T-3}} \dots \frac{q_{t+2}}{q_{t+1}} \frac{q_{t+1}}{q_t}\right) \\ &= \frac{1}{T} \left(\ln\left(\frac{q_{t+T}}{q_{t+T-1}}\right) + \ln\left(\frac{q_{t+T-2}}{q_{t+T-3}}\right) + \dots + \ln\left(\frac{q_{t+2}}{q_{t+1}}\right) + \ln\left(\frac{q_{t+1}}{q_t}\right)\right) \\ &= \frac{1}{T} (r_c(t + T - 1, t + T) + r_c(t + T - 2, t + T - 1) + \dots \\ &\quad + r_c(t + 1, t + 2) + r_c(t, t + 1)) \end{aligned}$$

Par conséquent, le rendement moyen est donc bien la moyenne arithmétique des rendements continus :

$$r_c(t, t + T) = \frac{1}{T} \sum_{\tau=1}^T r_c(t + \tau - 1, t + \tau) \quad (6)$$

et si l'on ne veut pas "annualiser" les rendements il suffit même de sommer les rendements.

La légitimité de recourir dans un tel cas à un taux continu suppose évidemment que la période choisie soit suffisamment courte. Cependant, empiriquement, les rendements

discrets et continus donnent des résultats très similaires dès lors que l'horizon est inférieur ou égal à 1 mois. Même à une échéance d'un an, les différences restent modestes comme le montrent les calculs qui suivent sur des indices et des titres américains et français.

Lorsque l'on calcule les rendements discrets et continus pour la journée, la semaine, le mois et l'année, et que l'on en déduit les moyennes et les écart-types des rendements sur la période, on obtient alors les résultats des figures 10 et 11. L'écart relatif $\frac{\text{rendement continu} - \text{rendement discret}}{\text{rendement discret}}$ (reporté en %) croît avec la longueur de la période, mais est généralement inférieur ou de l'ordre du point de pourcentage lorsque l'horizon est au plus d'un mois.¹ Lorsque l'horizon est annuel, l'écart demeure borné et est au maximum de l'ordre de 15% pour le rendement moyen - ce 15% étant une fourchette haute de ce que l'on observe plus généralement.

Références

[Ham04] J. Hamon, (2004). *Bourse et gestion de portefeuille*. Economica, Paris, 1ère édition, 2004.

¹On remarque aussi (et ceci est un résultat général) que le rendement continu est inférieur au rendement discret.

FIG. 10 – Rendements continus et discrets du CAC 40, de Michelin, du Dow Jones et de Microsoft : moyennes.

CAC 40

1er mars 1990 - 1er octobre 2004

Moyenne	observations	discrets	continus	diff relative
quotidiens	3667	0,00019392	0,0001939	-0,0096948
hebdomadair	522	0,00135166	0,00135075	-0,0675224
mensuels	121	0,00537138	0,005357	-0,2676109
annuels	13	0,03767981	0,03698727	-1,8379632

Michelin

1er mars 1990 - 1er octobre 2004

Moyenne	observations	discrets	continus	diff relative
quotidiens	3654	0,00021686	0,00021684	-0,0108414
hebdomadair	522	0,0016003	0,00159902	-0,0799299
mensuels	121	0,00691451	0,00689071	-0,3441401
annuels	115	0,03360455	0,03305226	-1,6435093

Indice Dow Jones (DJIA 30)

13 mars 1986 - 1er octobre 2004

Moyenne	observations	discrets	continus	diff relative
quotidiens	4000	0,00042801	0,00042791	-0,0213942
hebdomadair	668	0,00261529	0,00261188	-0,130537
mensuels	156	0,01130952	0,01124605	-0,5612485
annuels	18	0,10421131	0,09913133	-4,8746882

Microsoft

13 mars 1986 - 1er octobre 2004

Moyenne	observations	discrets	continus	diff relative
quotidiens	4000	0,00145489	0,00145383	-0,0726739
hebdomadair	668	0,00843553	0,00840015	-0,4194196
mensuels	156	0,03668027	0,03602356	-1,7903643
annuels	18	0,36526929	0,31135169	-14,761054

FIG. 11 – Rendements continus et discrets du CAC 40, de Michelin, du Dow Jones et de Microsoft : écart-types à différents horizons.

CAC 40

1er mars 1990 - 1er octobre 2004

Ecart-type	discrets	continus	diff relative
quotidiens	0,01382275	0,01382512	0,01711502
hebdomadair	0,03471919	0,03493901	0,63313436
mensuels	0,06864848	0,06882626	0,25896555
annuels	0,23483809	0,22498993	-4,1935983

Michelin

1er mars 1990 - 1er octobre 2004

Ecart-type	discrets	continus	diff relative
quotidiens	0,02131611	0,02129414	-0,1030764
hebdomadair	0,05791795	0,05779704	-0,2087668
mensuels	0,11501174	0,11508711	0,06552771
annuels	0,32710523	0,29337268	-10,312448

Indice Dow Jones (DJIA 30)

13 mars 1986 - 1er octobre 2004

Ecart-type	discrets	continus	diff relative
quotidiens	0,01097197	0,0112	1,63
hebdomadair	0,02792787	0,0286	2,58
mensuels	0,05569145	0,0568	2,03
annuels	0,14378285	0,1321	-8,13

Microsoft

13 mars 1986 - 1er octobre 2004

Ecart-type	discrets	continus	diff relative
quotidiens	0,02714612	0,02725102	0,38644776
hebdomadair	0,06304703	0,0628641	-0,290143
mensuels	0,12971582	0,12492012	-3,6970848
annuels	0,61606536	0,42336281	-31,279563