

La théorie du portefeuille

Philippe Bernard

Ingénierie Economique et Financière

Université Paris-Dauphine

Novembre 2007

1 Risque et analyse économique

La théorie financière moderne, dont le développement date des années 50, est le produit de la rencontre de l'économie mathématique classique et de la théorie des choix dans l'incertain. La fondation d'une théorie des choix rigoureuse s'est révélée particulièrement capitale.

La théorie économique qui s'est progressivement développée du *XIX^{ème}* siècle jusqu'à *Value and Capital* de John Hicks [Hic39] (exclus) était essentiellement statique et supposait une information parfaite, une absence de risque. En dépit des efforts de Bernoulli, les applications de la théorie des choix dans l'incertain à l'économie furent très rares. Parmi elles, on peut relever la théorie de l'assurance de Barrois [Bar34]¹, celle d'Edgeworth [Edg88] sur la couverture des dépôts bancaires. Wicksell [Wic96], dans son chapitre VI, appliqua les raisonnements d'Edgeworth à la détermination de l'encaisse optimale des entreprises. Enfin, dans l'appendice de *The nature of capital and income* [Fis06], Irving Fisher, un des pères fondateurs de l'économie mathématique au Etats-Unis, analysa les rendements des actifs financiers en terme de distributions ; il y proposa notamment de mesurer par l'écart-type l'incertitude affectant les rendements d'un capital et ses rendements. Mais, vingt ans plus tard, dans le chapitre XIV de son *Theory of Interest* [Fis30] il affirma que l'analyse du risque ne relevait pas de l'analyse mathématique ! Dans la théorie monétaire des années 30, les travaux pionniers de John Hicks [Hic35] [Hic39], Jacob Marschak [Mar38] recoururent au critère espérance/variance. Marschak [Mar38] poussa même l'audace jusqu'à exprimer les préférences sur l'investissement par des courbes d'indifférence dans le repère moyenne / variance tout en avançant l'hypothèse :

“The unsatisfactory state of Monetary Theory as compared with General Economics is due to the fact that the principle of determinateness so well established by Walras and Pareto for the world of perishable consumption goods and labor services has never been applied with much consistency to durable goods, and still less, to claims (securities, loans, cash).” (Jacob Marschak, 1938, [Mar38] p.312)

Néanmoins, en dehors de ces valeureux efforts, la théorie de la finance conservait une

¹Mais cette étude recourait au critère pascalien de l'espérance mathématique.

profonde aversion au risque. Ainsi, le manuel de référence de John Burr Williams [Wil38] était avant tout consacré à l'actualisation ; lorsque Keynes [Key68] prétendit prendre en compte le risque dans son efficacité marginale du capital, il se contenta en fait d'introduire une prime de risque *ad hoc* pour les actifs risqués.

Sans surprise, la théorie du portefeuille bénéficia du renouveau d'intérêt pour l'étude des choix dans l'incertain, qui suivit les travaux de von Neumann (et Morgenstern). Les travaux de Markowitz furent alors décisifs.

A la différence de Marschak et de Keynes qui avait concentré leur attention sur l'investissement, Markowitz concentra la sienne sur le problème de la diversification :

“Before Markowitz could propose the “expected return-variances of returns” rule, he first had to discredit the then widely accepted principle that an investor chooses a portfolio by selecting securities that maximize discounted expected returns. Markowitz points out that if an investor follows this rule, his or her portfolio will consist of only one stock, namely that the highest discounted expected return, which is contrary to the observed phenomenon of diversification. *Therefore a rule of investor portfolio which does not yield portfolio diversification must be rejected.* [...] Markowitz then proposes the expected mean returns - variances of returns M - V rule. He concludes that the M - V rule not only implies diversification, it actually implies *the right kind of diversification for the right reason.*” ([CM95] pp.2-3)

Ce chapitre présente les fondements de la théorie “classique” des portefeuilles. Dans une première section est donc présentée l'analyse espérance - variance. Puis, la théorie du portefeuille de Markowitz est exposée. Enfin, les conséquences de l'introduction d'un actif sans risque sur la structure des portefeuilles optimaux sont analysées.

2 Principes de la “finance quadratique”

Les représentations théoriques présentées ici sont statiques : on se situe à un instant donné (période 0) où les agents considérés doivent déterminer la composition de leurs portefeuilles. Pour la déterminer, ils prennent en compte le futur possible, i.e. les événements de seconde (et dernière période), la période T .

On suppose qu'il existe différents agents $i = 1, \dots, I$. Chaque agent est doté à la période 0 d'une richesse W^i . Il peut investir celle-ci dans différents actifs risqués $a = 1, \dots, A$. Chaque actif est défini par son prix q_a (fixé à la période 0), par son revenu futur. Celui-ci est généralement incertain et donc représenté par une variable aléatoire \tilde{V}_a . Le prix et le revenu aléatoire définissent donc le rendement aléatoire du titre \tilde{R}_a :

$$\tilde{R}_a = \frac{\tilde{V}_a}{q_a} \quad (1)$$

Le rendement espéré et la variance de l'actif a sont notés \overline{R}_a et σ_a^2 . Si un actif certain était présent, son indice serait 0.

Chaque agent doit déterminer la part x_a^i de sa richesse initiale à investir dans l'actif a . Si l'on note \mathbf{x}^i le vecteur colonne défini par ces différents choix :

$$\mathbf{x}^i = \begin{bmatrix} x_1^i \\ \dots \\ x_a^i \\ \dots \\ x_A^i \end{bmatrix}$$

la contrainte (budgétaire) des choix possibles s'écrit :

$$\sum_a x_a = \mathbf{1}^\top \mathbf{x}^i = 1 \quad (2)$$

où $(.)^\top$ est la transposé de $(.)$. $x_a^i < 0$ est supposé possible : économiquement, la vente à découvert est donc possible. Le revenu final de l'agent i s'écrit lui :

$$\widetilde{W}^i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^i \cdot W^i \quad (3)$$

où \mathbf{R} est le vecteur ligne des rendements.

L'hypothèse principale sur laquelle repose la théorie du portefeuille à la Markowitz ainsi que le MEDAF est qu'il est possible de représenter les préférences des agents sur les portefeuilles par des fonctions d'utilité ne dépendant que (de manière croissante) du rendement attendu de celui-ci et (de manière décroissante) de la variance du revenu de ce même portefeuille. Ainsi si l'on note \widetilde{W} et \widetilde{W}' deux profils aléatoires de revenus futurs, \overline{W} et \overline{W}' leurs espérances, σ_W^2 et $\sigma_{W'}^2$ leurs variances, alors l'hypothèse d'espérance - variance revient à supposer la propriété suivante :

Hypothèse 1 *L'utilité d'une distribution de la richesse dépend uniquement de l'espérance et de la variance de la richesse terminale :*

$$\widetilde{W} \succ \widetilde{W}' \Leftrightarrow U(\overline{W}, \sigma_W^2) > U(\overline{W}', \sigma_{W'}^2) \quad (4)$$

où \succ est le pré-ordre "strictement préféré(e) à", U est l'indice d'utilité ordinaire représentant \succ .

Grâce à cette hypothèse, l'analyse de portefeuille se résume à une analyse espérance variance. En effet, pour tout portefeuille \mathbf{x} sélectionné, si l'on note \overline{R}_p et σ_p^2 le rendement espéré et la variance du portefeuille, l'utilité de l'agent considéré s'écrit $U(\overline{R}_p W, \sigma_p^2 W^2)$. Comme W est une donnée du problème, on peut alors redéfinir l'indice d'utilité uniquement sur l'espérance et la variance du rendement du portefeuille. On peut en effet substituer à la fonction U la fonction V suivante :

$$\begin{aligned} V & : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R} \\ V(\overline{R}_p, \sigma_p^2) & = U(\overline{R}_p W, \sigma_p^2 W^2) \end{aligned}$$

Cette hypothèse est vérifiée pour certaines restrictions couramment utilisées en finance et en économie. Nous en présentons ici trois exemples.

Lorsque la fonction d'utilité élémentaire est quadratique, i.e. par exemple de la forme $w - k.w^2$, le critère espérance s'applique puisque :

$$U = \mathbf{E}[u(\tilde{w})] = \mathbf{E}[\tilde{w} - k\tilde{w}^2] = \mathbf{E}[\tilde{w}] - k.(\mathbf{E}[\tilde{w}]^2 + \sigma_w^2)$$

où : $\mathbf{E}[\cdot]$ est l'opérateur espérance, σ_w^2 la variance de la richesse. L'utilité dépend ainsi uniquement de l'espérance et de la variance. Cette première spécification, utilisée notamment par Markowitz, a cependant certaines propriétés contradictoires avec les faits stylisés : (a) l'utilité n'y est pas toujours croissante croissante de la consommation ; (b) avec une telle fonction, l'actif certain (la monnaie) est un bien supérieur et sa part dans le portefeuille est croissante du revenu.

Une autre manière de justifier l'espérance - variance est de supposer que les rendements sont des variables aléatoires dont la distribution suit la loi normale. Comme le suggèrent

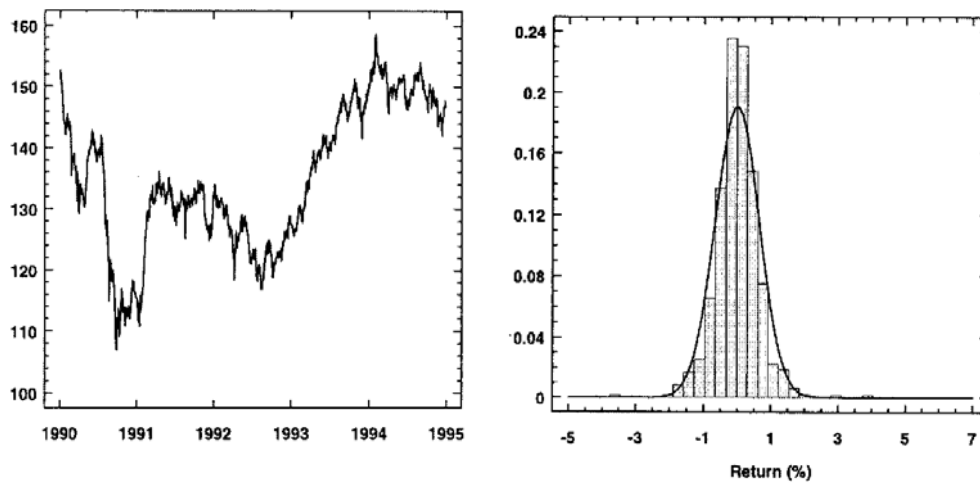


FIG. 1 – Evolution de l'indice des actions dans le monde entre 1990 et 1995 (données quotidiennes) et la distribution des rendements journaliers. (source : Aparicio & Estrada (2001))

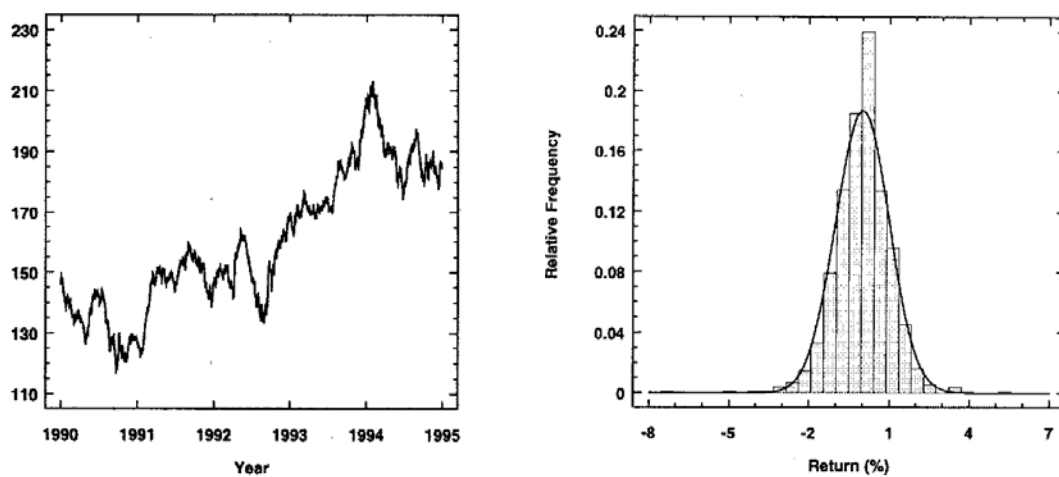


FIG. 2 – Evolution de l'indice des actions au Royaume-Uni de 1990 à 1995 (données quotidiennes) et la distribution des rendements quotidiens. (source : Aparicio & Estrada (2001))

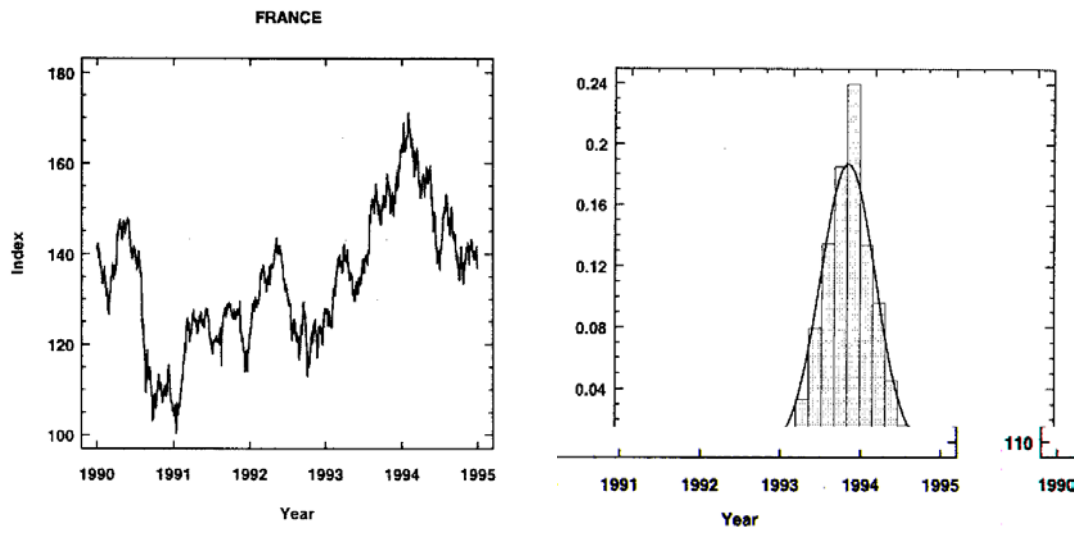


FIG. 3 – Evolution de l'indice des actions en France de 1990 à 1995 (données quotidiennes) et la distribution des rendements quotidiens. (source : Aparicio & Estrada (2001))

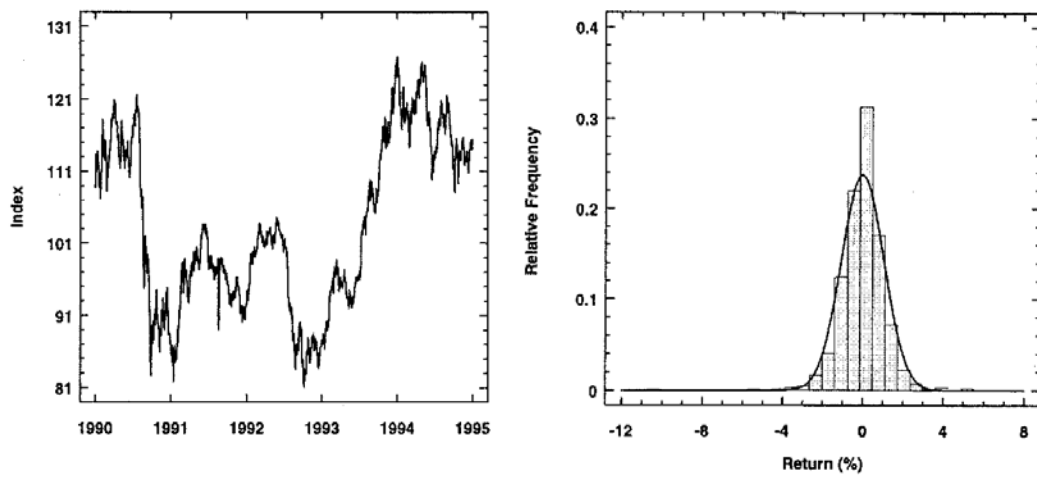


FIG. 4 – Evolution de l'indice des actions en Allemagne de 1990 à 1995 (données quotidiennes) et la distribution des rendements quotidiens. (source : Aparicio & Estrada (2001))

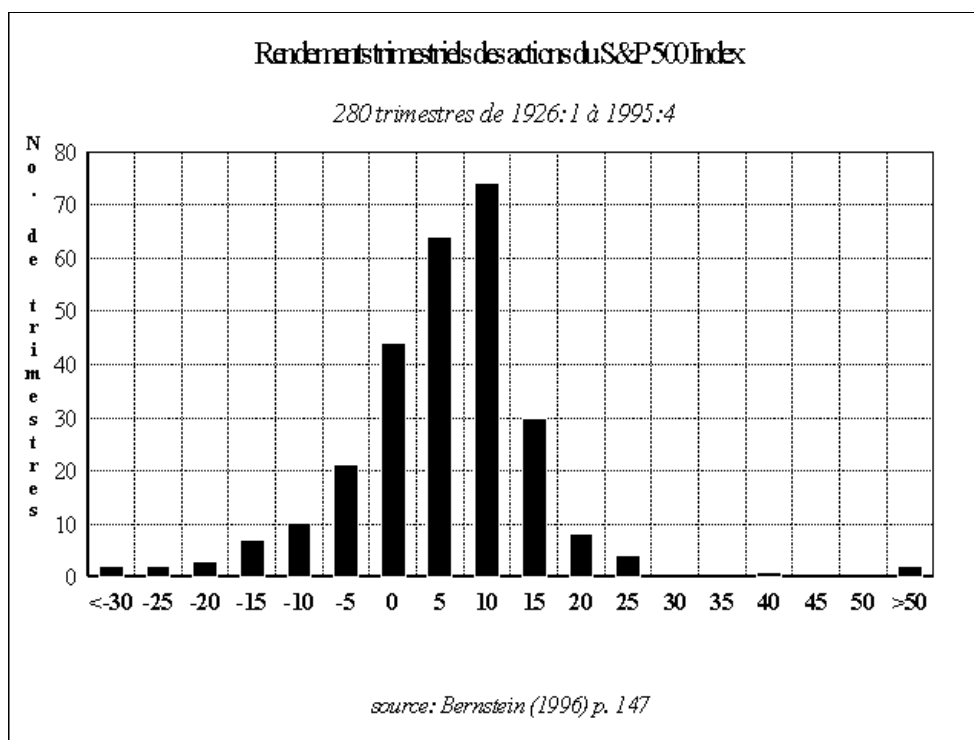


FIG. 5 – La distribution des rendements trimestriels de l'indice du Standard & Poor's 500 de 1926 à 1995.

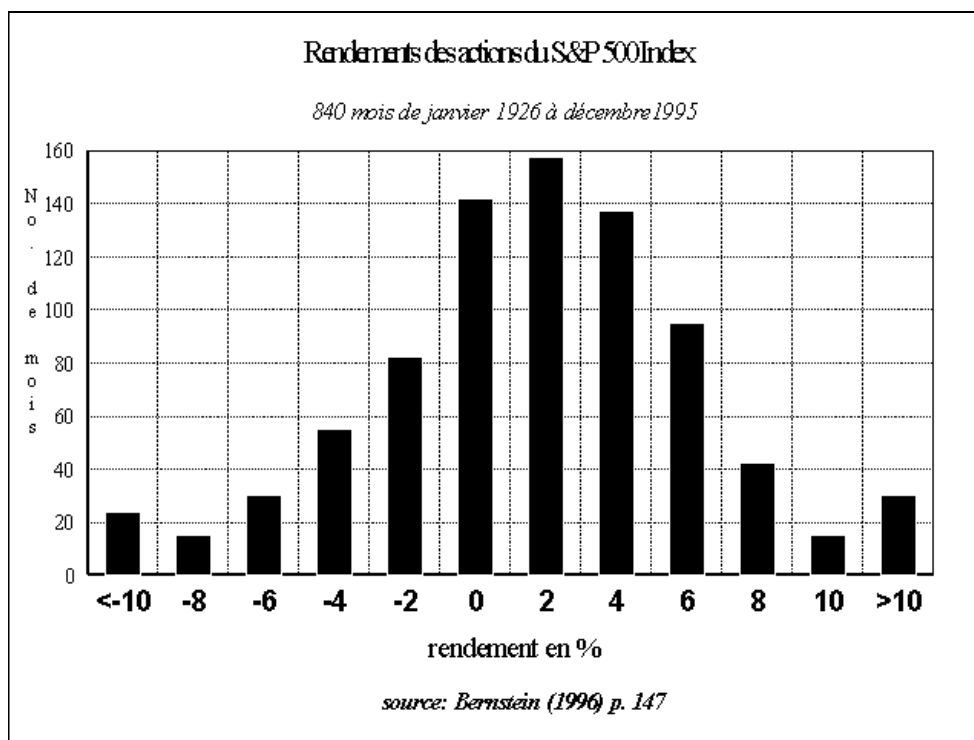


FIG. 6 – La distribution des rendements mensuels de l'indice du Standard & Poor's 500 de janvier 1926 à décembre 1995.

les figures 1, 2, 3, 4 pour l'Europe et le monde sur la période 1990-1995 et pour les Etats-Unis sur les figures 5 6, cette hypothèse gaussienne peut être acceptée en première approximation.²

Le critère espérance / variance est également le bon critère lorsque les variables aléatoires sont distribuées suivant la loi normale et que les préférences se caractérisent par une aversion absolue à l'égard du risque constante. Dans ce cas, la fonction d'utilité élémentaire est l'exponentielle négative : $u(\tilde{w}) = -e^{-a\tilde{w}}$. Lorsque la distribution de la richesse \tilde{w} est normale, $\mathcal{N}(m, \sigma_w^2)$, maximiser l'espérance de l'utilité revient à maximiser $\mathbf{E}[\tilde{w}] - \frac{a}{2}\sigma_w^2$.

En effet, si la richesse est une variable aléatoire normale \tilde{w} d'espérance mathématique m et d'écart type σ , l'utilité de von Neumann (espérance mathématique de l'utilité élémentaire) \mathbf{U} s'écrit :

$$\mathbf{U} = \mathbf{E}(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu \cdot w} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{w-m}{\sigma}\right)^2} dw$$

Posons $s = \frac{w-m}{\sigma}$, on a alors :

$$w = \sigma \cdot s = m, \quad dw = \sigma \cdot ds$$

L'espérance d'utilité peut donc être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu(\sigma s+m)} e^{-\frac{s^2}{2}} \sigma \cdot ds \\ &= \frac{-e^{-\nu m}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (s^2+2\sigma\nu s)} ds \\ &= \frac{-e^{\sigma m}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot [(s+\sigma\nu)^2 - \sigma^2 \cdot \nu^2]} ds \\ &= \frac{-e^{-\nu m + \frac{\nu^2 \sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (s+\sigma\nu)^2} ds \end{aligned}$$

Posons :

$$t = s + \sigma\nu, \quad dt = ds$$

On obtient alors :

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = -e^{-\nu m + \frac{1}{2} \cdot \nu^2 \cdot \sigma^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

²Cependant, les fréquences effectivement observées des valeurs extrêmes des rendements sont sensiblement supérieures aux fréquences permises par des lois normales. Parmi les distributions les plus courantes, la distribution de Student apparaît fréquemment comme la meilleure approximation. Voir APARICIO & ESTRADA [2001] [AE01] .

Le second membre est égal à 1. L'espérance d'utilité est donc reliée à la moyenne et à la variance de la manière suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = -e^{-\nu[m - \frac{1}{2}\nu\sigma^2]}$$

Maximiser l'espérance d'utilité revient donc à maximiser $m - \frac{1}{2}\nu\sigma^2$. La courbe d'indifférence (m, σ^2) correspondant au niveau d'espérance d'utilité \mathbf{U} a donc pour équation :

$$m = \frac{1}{2}\nu\sigma^2 + \frac{\text{Log } \mathbf{U}}{\nu}$$

Enfin, une dernière ligne de défense de l'espérance variance la présente comme une approximation. En effet, selon l'importance du risque de portefeuille, le problème général peut être approximativement assimilé soit au problème d'un agent neutre au risque, soit au problème d'un agent "quadratique" :

Proposition 1 *Si la richesse finale est la somme du revenu aléatoire du portefeuille \widetilde{W} d'une richesse certaine W_0 , alors le problème financier de l'agent considéré est approximativement :*

(i) *de maximiser l'espérance de son revenu \widetilde{W} , $\mathbf{E}\widetilde{W}$, si $\left(\frac{\widetilde{W}}{W_0}\right)^2$ est uniformément suffisamment petit³ ;*

(ii) *de maximiser une fonction V définie uniquement sur l'espérance et la variance de \widetilde{W} si $\left(\frac{\widetilde{w}}{W_0}\right)^3$ est uniformément suffisamment petit.*

démonstration :

On note \overline{W} l'espérance de la richesse investie dans des actifs risqués, σ_W^2 sa variance.

(i) Si $\left(\frac{\widetilde{w}}{W_0}\right)^2$ est petit alors $u(W_0 + \widetilde{W})$ peut être approximé par un développement de Taylor d'ordre 1 autour de W_0 :

$$u(W_0 + \widetilde{W}) \approx u(W_0) + u'(W_0)\widetilde{W}$$

les termes d'ordre supérieur du développement limité étant négligeables. Comme $u(W_0)$ et $u'(W_0)$ sont fixes, l'espérance de l'utilité vérifie :

$$\mathbf{E}u(W_0 + \widetilde{W}) \approx u(W_0) + u'(W_0)\mathbf{E}[\widetilde{W}]$$

³Rappelons que si $\left(\frac{\widetilde{W}}{W_0}\right)^2$ est petit alors tous les autres termes $\left(\frac{\widetilde{W}}{W_0}\right)^n$, $n > 2$, le seront aussi.

Maximiser $\mathbf{E}u(W_0 + \widetilde{W})$ revient à maximiser $\mathbf{E}\widetilde{W}$: lorsque $\left(\frac{\widetilde{w}}{W_0}\right)^2$ est petit, le gérant de portefeuille se comporte donc alors approximativement comme un agent neutre au risque.

(ii) si $\left(\frac{\widetilde{w}}{W_0}\right)^3$ est petit, le développement en série est nécessairement d'ordre 2 et il s'écrit :

$$\begin{aligned} u(W_0 + \widetilde{W}) &\approx u(W_0) + u'(W_0)\widetilde{W} + \frac{1}{2}u''(W_0) \cdot (\widetilde{W})^2 \\ &= u(W_0) + u'(W_0) \left[\widetilde{W} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u''(W_0)}{u'(W_0)} \cdot (\widetilde{W})^2 \right] \end{aligned}$$

$\frac{u''(W_0)}{u'(W_0)}$ est au signe près le coefficient d'Arrow-Pratt d'aversion absolue à l'égard du risque (évalué en W_0), que l'on note A :

$$A = -\frac{u''(W_0)}{u'(W_0)}$$

L'espérance de l'utilité est donc approximativement égale à :

$$\mathbf{E} \left[u(W_0 + \widetilde{W}) \right] = u(W_0) + u'(W_0) \left[\mathbf{E} \left[\widetilde{W} \right] - \frac{A}{2} \mathbf{E} \left[(\widetilde{W})^2 \right] \right]$$

Comme la variance σ_W^2 est égale à :

$$\sigma_W^2 = \mathbf{E} \left[(\widetilde{W})^2 \right] - \mathbf{E} \left[\widetilde{W} \right]^2$$

l'utilité espérée se réécrit :

$$\mathbf{E} \left[u(W_0 + \widetilde{W}) \right] = u(W_0) + u'(W_0) \left[\left(\overline{W} - \frac{A}{2} \overline{W}^2 \right) - \frac{A}{2} \sigma_W^2 \right]$$

Comme W_0 est fixe, et donc également $u(W_0)$ et $u'(W_0)$, maximiser l'espérance d'utilité revient à maximiser le terme entre crochets, ou encore la fonction V :

$$V(\overline{W}, \sigma_W^2) = \left(\overline{W} - \frac{A}{2} \overline{W}^2 \right) - \frac{A}{2} \sigma_W^2$$

■

Lorsque l'utilité de l'agent dépend positivement de l'espérance du rendement du portefeuille et négativement de sa variance, la maximisation de son utilité suppose la sélection des portefeuilles les moins risqués à rendement espéré donné. Aussi, la détermination des portefeuilles optimaux se fait en deux étapes :

1. la première permet de déterminer la *frontière d'efficience des portefeuilles*, i.e. l'ensemble des portefeuilles minimisant les risques à rendement moyen donné ;
2. la seconde conduit à confronter ce que désire l'agent et ce que propose le marché, i.e. à confronter les préférences à la frontière des portefeuilles efficients.

La première étape, sans doute la plus importante des deux, revient à analyser les opportunités qu'offre le marché en terme d'arbitrage rendement / risque.

3 La frontière des portefeuilles efficients

Le problème du détenteur du portefeuille est de choisir le rendement le plus élevé à risque donné, ou inversement pour un rendement donné de minimiser le risque. Dans ce dernier cas, pour chaque rendement (espéré) objectif \widehat{R} , la minimisation conduit à sélectionner un portefeuille. En balayant l'ensemble des rendements objectifs possibles, on détermine donc un ensemble de portefeuilles, les *portefeuilles efficients*. Dans l'espace rendement - risque, cet ensemble de portefeuille définit l'ensemble des couples rendement - risque efficients, la *frontière des portefeuilles efficients*. Dans ce qui suit, nous présentons rapidement les principaux résultats de la théorie du portefeuille sur cette frontière.

Tous les actifs financiers sont supposés risqués. Aussi, le problème de sélection est donc

pour chaque rendement objectif \widehat{R} de résoudre le problème suivant⁴ :

$$P(\widehat{R}) : \begin{cases} \min_{x_1, \dots, x_A} \sum_{a=1}^A \sum_{b=1}^A x_a x_b \sigma_{ab} \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_{a=1}^A x_a \cdot \overline{R}_a \geq \widehat{R} \\ \sum_{a=1}^A x_a = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Ce problème est un problème classique de minimisation d'une fonction de perte convexe sous des contraintes linéaires. Aussi, si l'on note $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu; \widehat{R})$ le lagrangien associé à ce problème, ce dernier peut être écrit sans perte de généralité :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu; \widehat{R}) = \sum_{a=1}^A \sum_{b=1}^A x_a x_b \sigma_{ab} + \lambda \left(\widehat{R} - \sum_{a=1}^A x_a \cdot \overline{R}_a \right) + \mu \left(\sum_{a=1}^A x_a - 1 \right)$$

où $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$. Les conditions de premier ordre (cpo) suffisante de ce problème est :

$$2 \sum_{b=1}^A x_b \sigma_{ab} - \lambda \overline{R}_a + \mu = 0, \quad a = 1, \dots, A \quad (6)$$

ou encore :

$$\lambda \overline{R}_a = 2 \sum_{b=1}^A x_b \sigma_{ab} + \mu, \quad a = 0, \dots, A$$

Dans cette expression, $\sum_{b=1}^A x_b \sigma_{ab}$ est la covariance entre le rendement de l'actif a et le rendement du portefeuille :

$$\text{cov}(\tilde{R}_a, \tilde{R}_p) = \text{cov}\left(\tilde{R}_a, \sum_a x_a \tilde{R}_a\right) = \sum_b x_b \text{cov}(\tilde{R}_a, \tilde{R}_b) = \sum_b x_b \sigma_{ab}$$

⁴Si la matrice des covariances est

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1A} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{A1} & \dots & \sigma_A^2 \end{bmatrix}$$

le problème s'écrit aussi sous forme matricielle :

$$P(\overline{R}) : \begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} \\ \text{sous les contraintes :} \\ \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{1} = 1 \\ \overline{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x} = \overline{R} \end{cases}$$

La condition marginale se réécrit donc :

$$\lambda \bar{R}_a = 2cov\left(\tilde{R}_a, \tilde{R}_p\right) + \mu, \quad a = 0, \dots, A$$

Economiquement, cette condition marginale égalise :

- le gain marginal de l'investissement dans l'actif a , la valeur du rendement marginal espéré ($\lambda \bar{R}_a$),
- au coût marginal de l'investissement- ce dernier comprenant
 - le coût marginal du financement (μ);
 - le coût marginal du risque financier induit par l'investissement ($2cov\left(\tilde{R}_a, \tilde{R}_p\right)$)⁵.

Comme μ a la nature d'un coût d'opportunité, on peut également présenter la condition marginale précédente comme une condition d'égalisation des gains nets marginaux des investissements. En effet, si l'on définit le gain net marginal comme la différence entre la valeur du rendement et le risque supplémentaire induit, si l'on prend comme actif de référence l'actif 1, alors chaque actif $a \neq 1$ vérifie :

$$\lambda \bar{R}_a - 2 \sum_{b=1}^A x_b \sigma_{ab} = \lambda \bar{R}_1 - 2 \sum_{b=0}^A x_b \sigma_{1b}$$

Cette relation illustre aussi trois propriétés essentielles de la théorie du portefeuille de Markowitz :

- si tous les actifs avaient des rendements identiques et indépendants, une diversification exacte - $x_a = 1/A$ - seraient la stratégie optimale puisque

$$\sigma_p = \sum_{a=1}^A x_a^2 \sigma_a^2 \Rightarrow \frac{d\sigma_p}{dx_a} = 2x_a \sigma_a^2$$

$$\lambda \bar{R} - 2x_a \sigma^2 = \lambda \bar{R} - 2x_1 \sigma^2 \Rightarrow x_a = x_1 = \frac{1}{A}$$

- le risque qu'apporte l'actif ne se confond avec son propre risque sa variance puisque *en général*

$$\frac{d\sigma_p^2}{dx_a} = 2 \sum_{b=1}^A x_b \sigma_{ab} = 2x_a \sigma_a^2 + 2 \sum_{b \neq a}^A x_b \sigma_{ab} \neq 2x_a \sigma_a^2$$

⁵Rappelons que $2cov$

- il peut être souhaitable de détenir un actif même si son rendement espéré est faible ainsi que son risque propre s’il est en moyenne suffisamment négativement corrélé avec les autres actifs, i.e. $\sum_{b \neq a}^A x_b \sigma_{ab} \ll 0$ -

$$\lambda \bar{R}_a - 2x_a \sigma_a^2 < 0 \not\Rightarrow x_a < 0$$

A l’optimum, le gérant doit donc faire des choix qui égalise la valeur nette des actifs. Si tel n’était pas le cas, on pourrait en effet, sans diminuer le rendement espéré, diminuer le risque totale du portefeuille. Cette dernière relation met en lumière les différents coûts et avantages de la sélection de chaque actif.

L’analyse de ces conditions marginales permet aussi de déterminer l’ensemble des couples variance / espérance efficients, i.e. l’équation de la frontière des portefeuilles efficaces. La propriété essentielle de celle-ci est d’être une parabole dans l’espace (variance, rendement espéré) comme le montre la figure 7. Les propriétés financières implicites à cette géométrie de la frontière sont les suivantes :

- il existe un portefeuille efficace qui minimise le risque ;
- la croissance de la (partie supérieure de la) frontière implique que l’on peut augmenter le rendement espéré des portefeuilles (efficients) mais au prix d’un risque croissant - aussi lorsque l’on doit évaluer *ex post* la performance d’un titre, d’un portefeuille ou d’un gérant, il est nécessaire de prendre en compte les risques encourus, de *corriger le rendement espéré du risque* ;
- la concavité de la courbe implique que l’augmentation de la variance a de moins en moins d’effet favorable - la morale de cette concavité est donc celle tirée par Fischer Black : “Pour obtenir des gains attendus plus élevés, vous devez prendre davantage de risque. Si vous voulez escalader une haute montagne, vous devez être préparé à souffrir.” ([Bla88], cité par [Ber95] p.210).

3.1 Le cas avec deux actifs

Aucun des deux actifs 1 et 2 n’est dominé : si le rendement espéré d’un actif est inférieur, son risque doit être également plus faible. Sans perte de généralité, on suppose par exemple que :

$$\bar{R}_1 > \bar{R}_2, \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

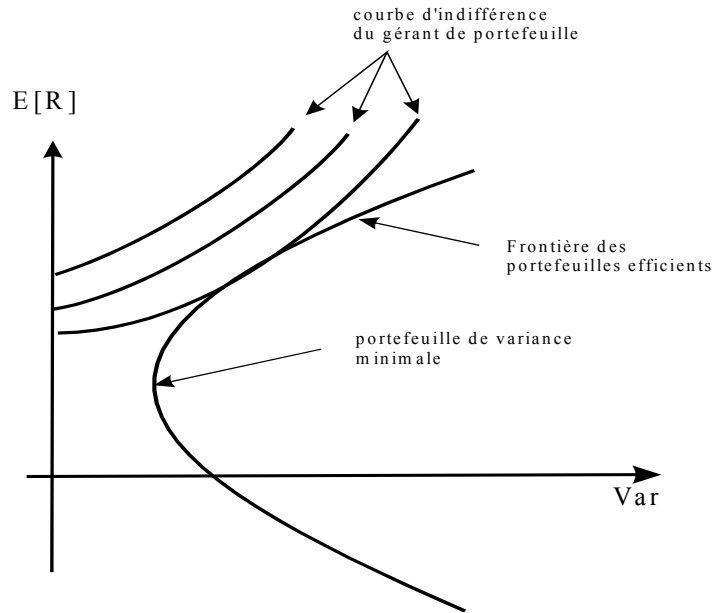


FIG. 7 – La détermination du portefeuille optimale sur la frontière des portefeuilles efficaces

Le problème de sélection du portefeuille s'écrit alors simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{0 \leq x \leq 1} x^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-x)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot x(1-x) \cdot \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \text{sous la contrainte :} \\ x \cdot \bar{R}_1 + (1-x) \cdot \bar{R}_2 \geq \hat{R} \end{array} \right.$$

où x est la part de la richesse investie dans l'actif 1, $1-x$ celle investie dans l'actif 2, ρ le coefficient de corrélation.

Le portefeuille donnant le rendement exigé \hat{R} est dans le cas à deux actifs trivialement déterminé par la contrainte :

$$x \cdot \bar{R}_1 + (1-x) \cdot \bar{R}_2 = \hat{R} \Rightarrow x(\hat{R}) = \frac{\hat{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2}$$

En substituant à x dans la formule de la variance on obtient alors l'expression de la variance σ_p^2 du portefeuille efficient donnant \bar{R} :

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_1}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \left(\frac{\bar{R}_1 - \bar{R}}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_1 \sigma_2 \rho$$

Lorsque les actifs sont positivement parfaitement corrélés, alors $\rho = 1$ et la variance

se réécrit alors :

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_1}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \left(\frac{\bar{R}_1 - \bar{R}}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_1 \sigma_2 \\ &= \left[\left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_1 + \left(\frac{\bar{R}_1 - \bar{R}}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_2 \right]^2\end{aligned}$$

et donc l'expression de l'écart-type du portefeuille est linéaire :

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_1 + \left(\frac{\bar{R}_1 - \bar{R}}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_2 \\ \bar{R} &= \bar{R}_1 \Rightarrow \sigma_p = \sigma_1 \\ \bar{R} &= \bar{R}_2 \Rightarrow \sigma_p = \sigma_2 \\ \bar{R} &\in (\bar{R}_2, \bar{R}_1) \Rightarrow \sigma_p \in (\sigma_2, \sigma_1)\end{aligned}$$

Lorsque les actifs ne sont pas parfaitement positivement corrélés alors :

$$\rho < 1 \Rightarrow \sigma_p^2 < \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_1}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right)^2 \cdot \sigma_2^2$$

et donc dans l'espace (σ, \bar{R}) , la courbe se trouve au dessus de la frontière obtenue pour $\rho = 1$ (voir figure 8). Lorsque par contre les actifs sont négativement parfaitement corrélés, alors $\rho = -1$ et la variance se réécrit alors :

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_1}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right)^2 \cdot \sigma_2^2 - 2 \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \left(\frac{\bar{R}_1 - \bar{R}}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_1 \sigma_2 \\ &= \left[\left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_1 - \left(\frac{\bar{R}_1 - \bar{R}}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_2 \right]^2\end{aligned}$$

et donc l'expression de l'écart-type du portefeuille est linéaire :

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_1 - \left(\frac{\bar{R}_1 - \bar{R}}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_2 \\ \bar{R} &= \bar{R}_1 \Rightarrow \sigma_p = \sigma_1 \\ \bar{R} &= \bar{R}_2 \Rightarrow \sigma_p = \sigma_2\end{aligned}$$

Le rendement espéré minimisant la variance minimale est \bar{R}_{\min} vérifiant :

$$\frac{d\sigma_p^2}{d\bar{R}} = 0$$

Or :

$$\frac{d\sigma_p^2}{d\bar{R}} = 2 \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \left[\left(\frac{\bar{R} - \bar{R}_2}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_1 - \left(\frac{\bar{R}_1 - \bar{R}}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \right) \sigma_2 \right]$$

courbe d'indifférence
du gérant de portefeuille

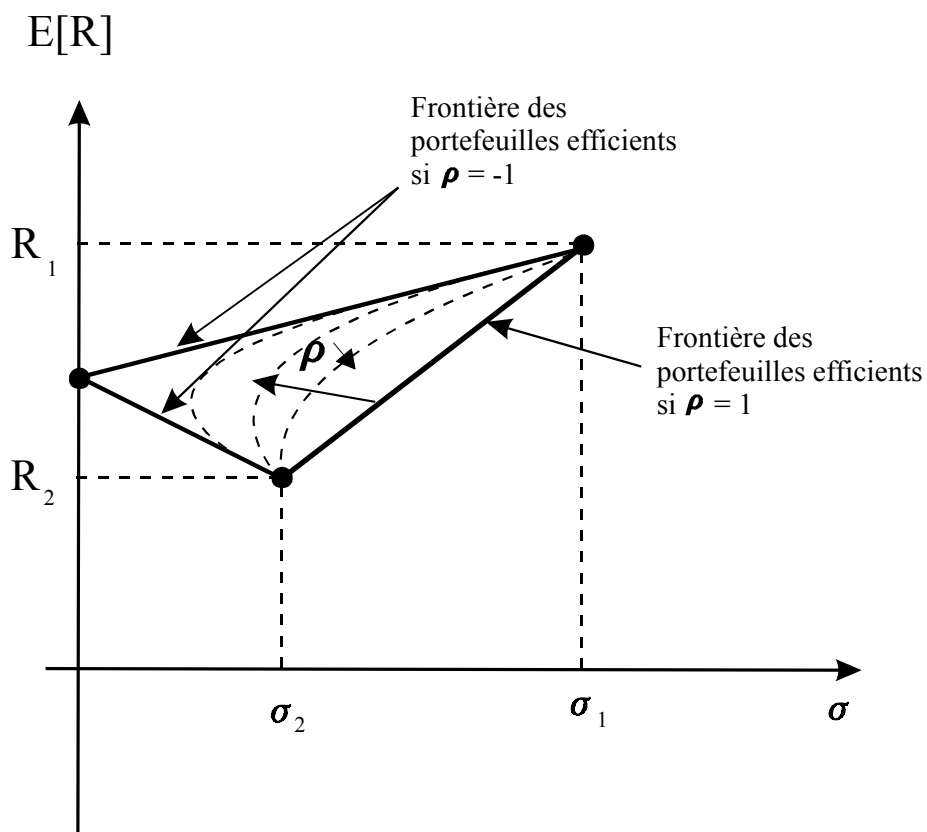


FIG. 8 – La frontière des portefeuilles efficaces pour deux actifs dans l'espace (écart-type, rendement espéré) en fonction du coefficient de corrélation ρ .

et donc :

$$(\bar{R} - \bar{R}_2) \sigma_1 - (\bar{R}_1 - \bar{R}) \sigma_2 = 0$$

$$\bar{R}_{\min} = \frac{\bar{R}_2 \sigma_1 + \bar{R}_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Lorsque $\bar{R} = \bar{R}_{\min}$, $\sigma_p = 0$ si $\rho = -1$. La figure 8 résume graphiquement l'ensemble des résultats.

Exercice 1 On considère le portefeuille formé des deux actifs suivant :

| | | |
|-------------------------|-----|------|
| <i>actifs</i> | 1 | 2 |
| <i>rendement espéré</i> | 10% | 40% |
| <i>écart - type</i> | 4% | 6% |
| <i>coef. de corr.</i> | | -0.6 |

- (1) calculez la covariance des rendements des deux actifs ;
- (2) tracez la courbe (variance, espérance des rendements) des différents portefeuilles ;
- (3) déterminez le portefeuille le plus sûr (composition, variance et rendement moyen) ;
- (4) calculez la frontière des portefeuilles efficients.

Correction 1 Notons la proportion de l'actif 1 : x . La contrainte de rendement espéré est donc :

$$0.1x + 0.4(1 - x) = \bar{R}$$

d'où l'on obtient :

$$x^* = \frac{4 - 10\bar{R}}{3}$$

La variance de ce portefeuille est donc :

$$\sigma_p^2(x) = 16x^2 + 36(1 - x)^2 - 28.8x(1 - x) \quad (.10^{-4})$$

$$v(x) = 80.8x^2 - 100.8x + 36 \quad (.10^{-4})$$

$$\sigma_p^2\left(\frac{4 - 10\bar{R}}{3}\right) = 80.8 \left(\frac{4}{3} - \frac{10}{3}\bar{R}\right)^2 - 98.4 + 336\bar{R}$$

$$= 45.244 - 382.22\bar{R} + 897.78\bar{R}^2$$

$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_p^2 = 161.6x - 100.8 = 0$, et le portefeuille de variance minimale est donc $x = .62376$, le rendement moyen de ce portefeuille étant $\bar{R} = 18.767\%$.

3.2 Le cas à N actifs

Le cas à deux actifs est évidemment un cas (trop) simple. On considère donc désormais le cas général où l'agent considéré doit se constituer des portefeuilles en sélectionnant A actifs risqués $a = 1, \dots, A$. Le problème s'écrit donc :

$$P(\bar{R}) : \begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} \\ \text{sous les contraintes :} \\ \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{1} = 1 \quad (\mu) \\ \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x} = \bar{R} \quad (\lambda) \end{cases} \quad (7)$$

où μ et λ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes, $\boldsymbol{\sigma}$ est matrice des covariances, \mathbf{x} est le vecteur colonne des parts investies dans les différents actifs, $\mathbf{1}$ est le vecteur colonne dont toutes les composantes sont égales à 1, $\bar{\mathbf{R}}$ est le vecteur ligne des rendements espérés :

$$\bar{\mathbf{R}} = \left[\bar{R}_1 \quad \dots \quad \bar{R}_a \quad \dots \quad \bar{R}_A \right]$$

Le Lagrangien peut donc être écrit⁶ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} + \lambda (\bar{R} - \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}) + \mu (1 - \mathbf{1}^\top \cdot \mathbf{x}) \quad (8)$$

où \bar{R} est le rendement exigé.

La condition de premier ordre⁷ est :

$$\mathbf{x}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} - \lambda \cdot \bar{\mathbf{R}} - \mu \cdot \mathbf{1}^\top = \mathbf{0}$$

ou encore :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} - \lambda \cdot \bar{\mathbf{R}}^\top - \mu \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (9)$$

Le réarrangement de ces équations permet de déterminer le portefeuille efficient :

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\sigma}^{-1} \left(\lambda \cdot \bar{\mathbf{R}}^\top + \mu \cdot \mathbf{1} \right) \quad (10)$$

ou encore :

$$\mathbf{x}^\top = \left(\lambda \cdot \bar{\mathbf{R}} + \mu \cdot \mathbf{1}^\top \right) \boldsymbol{\sigma}^{-1}$$

⁶La variance est divisée par 2 uniquement pour ne pas avoir à conserver des constantes numériques dans les conditions de premier ordre.

⁷Cette condition est ici suffisante puisque l'on a une fonction quadratique à minimiser sous des contraintes linéaires.

Ces expressions dépendent de la valeur des multiplicateurs (λ et μ), celle-ci dépendant du rendement \bar{R} exigé. Pour déterminer la valeur de ces multiplicateurs, on substitue l'expression de \mathbf{x} dans les deux contraintes du problème :

$$\begin{aligned}(\lambda \bar{\mathbf{R}} + \mu \cdot \mathbf{1}^\top) \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} &= 1 \\ \bar{\mathbf{R}} \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\lambda \cdot \bar{\mathbf{R}}^\top + \mu \cdot \mathbf{1}) &= \bar{R}\end{aligned}$$

Le développement de ces deux expressions donne un système à deux équations deux inconnues (λ et μ) :

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \bar{\mathbf{R}} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} + \mu \cdot \mathbf{1}^\top \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} &= 1 \\ \lambda \cdot \bar{\mathbf{R}} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{R}}^\top + \mu \cdot \bar{\mathbf{R}} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} &= \bar{R}\end{aligned}$$

En notant :

$$\begin{aligned}A &= \bar{\mathbf{R}} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} \\ B &= \bar{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}^\top \\ C &= \mathbf{1}^\top \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1}\end{aligned}$$

et en remarquant que A et B sont deux formes quadratiques positives puisque $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$, comme $\boldsymbol{\sigma}$, est définie positive. Les équations précédentes se réécrivent :

$$\begin{aligned}A\lambda + C\mu &= 1 \\ B\lambda + A\mu &= \bar{R}\end{aligned}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{A - C\bar{R}}{A^2 - B.C} = \frac{C.\bar{R} - A}{D} \\ \mu &= \frac{A.\bar{R} - B}{A^2 - B.C} = \frac{B - A\bar{R}}{D}\end{aligned}$$

où $D = BC - A^2$. Pour déterminer le signe de D , on étudie la forme quadratique $(A\bar{\mathbf{R}} - B \cdot \mathbf{1}^\top) \boldsymbol{\sigma}^{-1} (A\bar{\mathbf{R}}^\top - B \cdot \mathbf{1})$. Celle-ci est positive puisque $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ est définie positive et elle peut s'écrire : $B^2C - A^2B = B(BC - A^2) = B.D$. Comme $B.D > 0$ et que $B > 0$, $D > 0$.

La connaissance des multiplicateurs permet d'obtenir immédiatement l'équation de la frontière des portefeuilles efficients. En effet, à l'aide de la condition de premier ordre :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \bar{\mathbf{R}}^\top + \mu \cdot \mathbf{1}$$

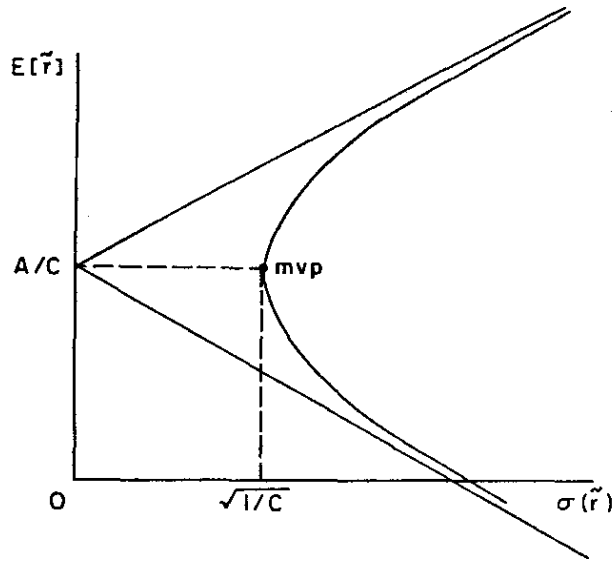


FIG. 9 – La frontière des portefeuilles efficaces dans l'espace écart type / espérance des rendements

la variance du portefeuille optimal se réécrit immédiatement :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{opt}^2 &= \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x} \\
 &= \mathbf{x}^\top (\lambda \cdot \bar{\mathbf{R}}^\top + \mu \cdot \mathbf{1}) \\
 &= \lambda \cdot \bar{R} + \mu
 \end{aligned}$$

La substitution à λ et μ de leurs valeurs donnent alors l'équation de la frontière :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{opt}^2 &= \frac{(C\bar{R} - A)\bar{R} + B - A\bar{R}}{D} \\
 &= \frac{C\bar{R}^2 - 2A\bar{R} + B}{D}
 \end{aligned}$$

Comme le montrent les figures 9 et 10, l'équation de la frontière des portefeuilles efficaces est une parabole dont la base est le portefeuille de variance minimale.

Proposition 2 *En l'absence d'un actif sans risque, la frontière d'efficience est la partie 'supérieure' d'une parabole dont l'équation est :*

$$\sigma^2 = \frac{C\bar{R}^2 - 2A\bar{R} + B}{D}$$

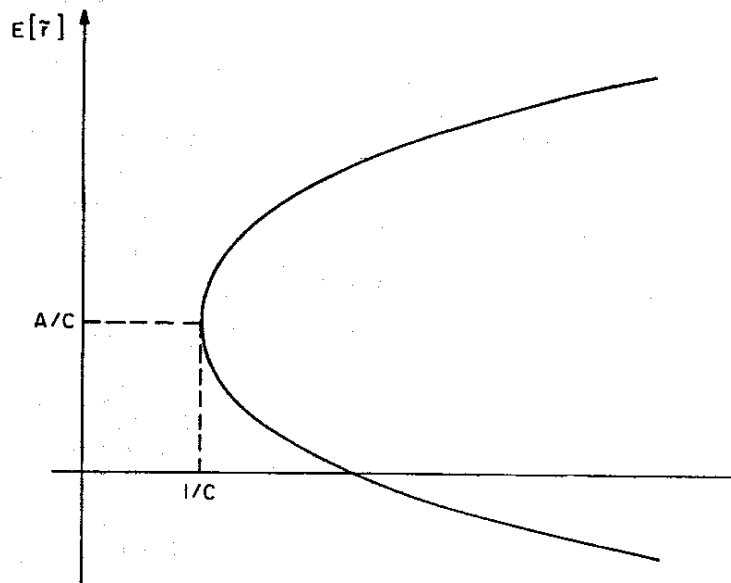


FIG. 10 – La frontière des portefeuilles efficaces dans l'espace variance / espérance des rendements

La connaissance de la valeur des multiplicateurs permet aussi d'exprimer le portefeuille en fonction des variables exogènes, du rendement espéré objectif \bar{R} . En reportant la valeurs des multiplicateurs dans les conditions de premier ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \boldsymbol{\sigma}^{-1} \left(\frac{C \cdot \bar{R} - A \bar{\mathbf{R}}^\top}{D} \mathbf{R}^\top + \frac{B - A \bar{R}}{D} \mathbf{1} \right) \\ &= \frac{B \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} - A \boldsymbol{\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{R}}^\top}{D} + \frac{C \boldsymbol{\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{R}}^\top - A \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} \bar{R}}{D} \end{aligned}$$

Si on note \mathbf{p}_0 et \mathbf{p}_1 les vecteurs colonnes suivants :

$$\mathbf{p}_0 = \frac{B \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} - A \boldsymbol{\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{R}}^\top}{D}, \quad \mathbf{p}_1 = \frac{C \boldsymbol{\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{R}}^\top - A \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} \bar{R}}{D}$$

le résultat suivant est immédiat :

Propriétés 1 *Les choix optimaux sont linéaires par rapport au rendement exigé :*

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \bar{R} \mathbf{p}_1 \quad (11)$$

où les vecteurs \mathbf{p}_0 et \mathbf{p}_1 ne dépendent que de la matrice des variances/covariances et de rendements.

L'analyse du vecteur colonne \mathbf{p}_0 montre que celui-ci est un portefeuille :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}^\top \mathbf{p}_0 &= \mathbf{1}^\top \frac{B\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbf{1} - A\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overline{\mathbf{R}}^\top}{D} \\ &= \frac{B\mathbf{1}^\top\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbf{1} - A\mathbf{1}^\top\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overline{\mathbf{R}}^\top}{D} \\ &= \frac{BC - A^2}{D} = 1\end{aligned}$$

alors que \mathbf{p}_1 est seulement la direction dans laquelle on doit modifier le portefeuille initiale lorsque le rendement exigé augmente :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}^\top \mathbf{p}_1 &= \mathbf{1}^\top \frac{C\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overline{\mathbf{R}}^\top - A\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbf{1}}{D} \\ &= \frac{CA - AC}{D} \\ &= 0\end{aligned}$$

Un corollaire de ces résultats est que $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1$ est un portefeuille puisque :

$$\mathbf{1}^\top (\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1) = \mathbf{1}^\top \mathbf{p}_0 + \mathbf{1}^\top \mathbf{p}_1 = 1 + 0 = 1$$

L'équation (11) permet de caractériser plus avant les portefeuilles \mathbf{p}_0 et $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1$ puisque :

$$\begin{aligned}\overline{R} &= 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + 0.\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 \\ \overline{R} &= 1 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + 1.\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1\end{aligned}$$

Le portefeuille \mathbf{p}_0 est donc celui dont le rendement espéré est nul, le portefeuille $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1$ celui de rendement unitaire (résultat dû à Merton [Mer72]).

L'intérêt de ces deux portefeuilles est de donner une méthode simple de construction des portefeuilles efficients. En effet, lorsque le rendement espéré objectif est \overline{R} , le portefeuille efficient est :

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \overline{R}.\mathbf{p}_1$$

lequel peut être réécrit comme une combinaison linéaire des deux vecteurs \mathbf{p}_0 et $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1$ puisque :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{p}_0 + \overline{R}.\mathbf{p}_1 \\ &= [\overline{R} + (1 - \overline{R})] \mathbf{p}_0 + \overline{R}.\mathbf{p}_1\end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbf{x} = (1 - \bar{R}) \mathbf{p}_0 + \bar{R} \cdot (\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1) \quad (12)$$

Le portefeuille optimal donnant \bar{R} est donc simplement obtenu en combinant obtenu à partir de ces deux portefeuilles de rendement 0 et 1 en combinant les deux vecteurs \mathbf{p}_0 et $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1$.

Le calcul de la frontière des portefeuilles efficients, la détermination des portefeuilles optimaux par la combinaison des vecteurs \mathbf{p}_0 et \mathbf{p}_1 permet de vérifier une dernière propriété classique de la théorie des portefeuilles. Le portefeuille de variance minimale étant bien défini, les *portefeuilles efficaces* peut désormais être caractérisés par une espérance de rendement est supérieur à celle du portefeuille de variance minimale, i.e supérieure à A/C .

4 Portefeuilles efficients avec un actif sans risque

TOBIN [1958] [Tob58] puis SHARPE [1964] [Sha64] ont étendu la théorie du portefeuille de MARKOWITZ de deux manières :

- ils ont introduit l’hypothèse de l’existence d’un actif sans risque ;
- ils en ont fait une théorie positive.

Tobin s’est contenté d’appliquer la théorie du portefeuille à la demande de monnaie, mais Sharpe⁸ en a fait le socle d’une théorie de l’équilibre financier sous trois hypothèses supplémentaires :

- les marchés financiers sont parfait au sens où les agents peuvent prêter et emprunter sans aucune contrainte quantitative ;
- les marchés financiers sont parfaitement concurrentiels ;

⁸et aussi Lintner [Lin65], Mossin [Mos66]. Le modèle de Mossin est sans doute le plus remarquable des trois par sa limpidité. Aussi est-il quelque peu injuste que Sharpe est monopolisé l’attention alors que comme le notait (perfidement) Jan Mossin : ‘The paper by Sharpe gives a verbal diagrammatical discussion of the determination of asset prices in quasi-dynamic terms. His general description of the character of the market is similar to the one presented here, however, and his main conclusions are certainly consistent with ours. *But his lack of precision in the specification of equilibrium conditions leaves parts of his arguments somewhat indefinite* (souligné par nous).’ ([Mos66] p.769)

- les agents ont les mêmes anticipations rationnelles sur les rendements⁹.

Comme l’a noté BRENNAN [Bre89] :

“The reason for delay [between Markowitz (1959) and Sharpe (1964)] was undoubtedly the boldness of the assumption required for progress, namely that all investors hold the same beliefs about the joint distribution of a security.”
 ([Bre89] p.93)

On suppose qu’il existe trois actifs seulement : l’actif sans risque (actif 0), deux actifs risqués (actifs 1 et 2). Se construire un portefeuille est donc choisir x_0, x_1, x_2 vérifiant :

$$x_0 + x_1 + x_2 = 1$$

Une autre manière de présenter ces choix de portefeuille consiste à se les représenter en deux étapes :

- on détermine d’abord la part x_0 de la richesse que l’on désire investir en actif sans risque ;
- puis on détermine la distribution de la richesse restante $(1 - x_0)$ entre les deux actifs risqués, autrement dit on détermine le portefeuille d’actifs risqués $(z, 1 - z)$ que l’on désire se construire.

Evidemment, les x et les z sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$x_1 = (1 - x_0)z$$

$$x_2 = (1 - x_0)(1 - z)$$

Ainsi, si un agent investit 60% de sa richesse en actifs sans risque, et se construit un portefeuille risqué comprenant 20% de l’actif 1, 80% de l’actif 2, on a $z = 0.2$.

Le problème de portefeuille à résoudre est alors toujours :

$$P_0(\bar{R}) \begin{cases} \min_{x_1, x_2} \frac{1}{2} [x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12}] \\ \text{sous la contrainte :} \\ [x_1 (\bar{R}_1 - \bar{R}_2) + x_2 (\bar{R}_2 - R_0)] \geq \hat{R} - R_0 \end{cases}$$

⁹Sharpe attribue le terme d’homogénéité des anticipations à un des référés de son article. Bien que concédant ‘l’irréalisme’ de cette hypothèse, il la justifiait par sa conséquence, la réalisation de l’équilibre.

Comme le lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} [x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12}] - \lambda [[x_1 (\bar{R}_1 - \bar{R}_0) + x_2 (\bar{R}_2 - \bar{R}_0)] - \bar{R} - R_0]$$

ses dérivées sont :

$$\frac{dL}{dx_1} = x_1 \sigma_1^2 + x_2 \sigma_{12} - \lambda (\bar{R}_1 - \bar{R}_0)$$

$$\frac{dL}{dx_2} = x_2 \sigma_2^2 + x_1 \sigma_{12} - \lambda (\bar{R}_2 - \bar{R}_0)$$

A l'optimum ces dérivées doivent être égales à 0 et, en faisant le changement de variable des x en z , elles s'écrivent donc :

$$(1 - x_0)(z\sigma_1^2 + (1 - z)\sigma_{12}) = \lambda (\bar{R}_1 - \bar{R}_0)$$

$$(1 - x_0)(z\sigma_{12} + (1 - z)\sigma_2^2) = \lambda (\bar{R}_2 - \bar{R}_0)$$

Chaque terme à gauche de l'égalité représente la contribution marginale de l'actif au risque du portefeuille; celle-ci est proportionnelle à la part risquée $(1 - x_0)$. A l'optimum donc on a :

$$z\sigma_1^2 + (1 - z)\sigma_{12} = \frac{\lambda}{1 - x_0} (\bar{R}_1 - \bar{R}_0) \Rightarrow \frac{z\sigma_1^2 + (1 - z)\sigma_{12}}{\bar{R}_1 - \bar{R}_0} = \frac{\lambda}{1 - x_0}$$

$$z\sigma_{12} + (1 - z)\sigma_2^2 = \frac{\lambda}{1 - x_0} (\bar{R}_2 - \bar{R}_0) \Rightarrow \frac{z\sigma_{12} + (1 - z)\sigma_2^2}{\bar{R}_2 - \bar{R}_0} = \frac{\lambda}{1 - x_0}$$

Le numérateur est (au facteur 2 près) la dérivée de la variance du portefeuille risqué formé de z actifs 1 et de $1 - z$ actifs 2 :

$$\frac{d\sigma_p^r}{dz} = 2 [z\sigma_1^2 + (1 - z)\sigma_{12}], \quad \frac{d\sigma_p^r}{d(1 - z)} = 2 [z\sigma_{12} + (1 - z)\sigma_2^2]$$

Le dénominateur est le surcroît de rendement net que donne chaque actif. Par conséquent à l'optimum le taux auquel l'actif 1 et 2 permettent d'échanger le risque et les rendements sont égalisées :

$$\frac{d\sigma_p^r}{d(\bar{R}_2 - \bar{R}_0)} = \frac{d\sigma_p^r}{d(\bar{R}_1 - \bar{R}_0)}$$

où σ_p^r est la variance du portefeuille risqué. Avec un actif sans risque, ceci est vérifiée dès lors que :

$$\frac{z\sigma_1^2 + (1 - z)\sigma_{12}}{\bar{R}_1 - \bar{R}_0} = \frac{z\sigma_{12} + (1 - z)\sigma_2^2}{\bar{R}_2 - \bar{R}_0}$$

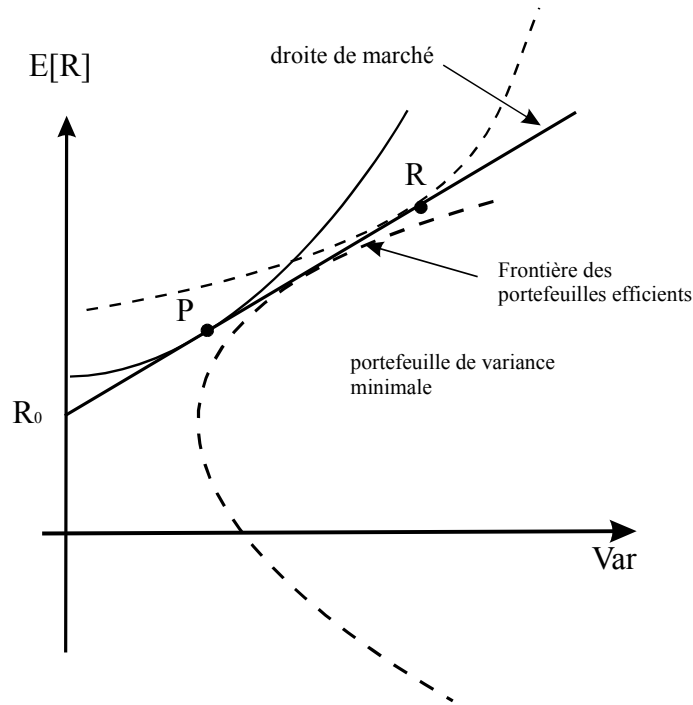


FIG. 11 – La droite de marché lorsqu'il existe un actif sans risque.

Cette équation ne comporte qu'une inconnue : z , et celle-ci ne dépend que des rendements espérés et des moments d'ordre deux, jamais de l'objectif de rendement \bar{R} . La composition du portefeuille est donc la même pour tous les agents quels que soient leurs objectifs. Pour déterminer le portefeuille optimal dès lors qu'il existe un actif sans risque, il suffit de combiner ce portefeuille risqué commun $(z, 1 - z)$ à l'actif sans risque. Ceci constitue le théorème des deux fonds.

Ce résultat obtenu pour deux actifs risqués est toujours vrai lorsque l'on a A actifs risqués, avec $A \geq 2$. En effet, les conditions marginales et la contrainte de rendements nous donne le système suivant à $A + 1$ équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (cpo \text{ actif } 1) & \lambda(\bar{R}_1 - R_0) = \sum_j x_j \sigma_{1j} \\ \dots & \dots \\ (cpo \text{ actif } a) & \lambda(\bar{R}_a - R_0) = \sum_j x_j \sigma_{aj} \\ \dots & \dots \\ (cpo \text{ actif } A) & \lambda(\bar{R}_A - R_0) = \sum_j x_j \sigma_{Aj} \\ (cont. \text{ rendement}) & \sum_{j=1}^A x_a (\bar{R}_a - R_0) = \bar{R} - R_0 \end{array} \right.$$

En rapportant les conditions marginales des actifs 2, ..., A à la condition marginale de l'actif A, on transforme le système en A équations à A inconnues (x_1, \dots, x_A) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (cpo \text{ actif } 2/cpo \text{ actif } 1) & \frac{\bar{R}_2 - R_0}{\bar{R}_1 - R_0} = \frac{\sum_j x_j \sigma_{2j}}{\sum_j x_j \sigma_{1j}} \\ \dots & \dots \\ (cpo \text{ actif } a/cpo \text{ actif } 1) & \frac{\bar{R}_a - R_0}{\bar{R}_1 - R_0} = \frac{\sum_j x_j \sigma_{aj}}{\sum_j x_j \sigma_{1j}} \\ \dots & \dots \\ (cpo \text{ actif } A/cpo \text{ actif } 1) & \frac{\bar{R}_A - R_0}{\bar{R}_1 - R_0} = \frac{\sum_j x_j \sigma_{Aj}}{\sum_j x_j \sigma_{1j}} \\ (cont. rendement) & \sum_{j=1}^A x_a (\bar{R}_a - R_0) = \bar{R} - R_0 \end{array} \right. \quad (13)$$

La stricte convexité de la fonction objectif assure l'unicité de la solution. En raison de l'existence d'un actif certain, $\sum_{a=1}^A x_a = 1 - x_0$, et n'est pas nécessairement égale à 1. Une propriété remarquable des $A - 1$ premières équations est d'être homogène de degré 0 par rapport aux x . Par conséquent si $x = (x_1, \dots, x_A)$ le vérifie alors $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_A)$ également pour tout $\lambda \neq 0$. Ceci vaut notamment donc pour le portefeuille $z = (z_1, \dots, z_A)$ défini par :

$$z_a = \frac{x_a}{\sum_{a=1}^A x_a}, \quad a = 1, \dots, A$$

et vérifiant par construction :

$$\sum_{a=1}^A z_a = \sum_{a=1}^A \frac{x_a}{\sum_{a=1}^A x_a} = \frac{\sum_{a=1}^A x_a}{\sum_{a=1}^A x_a} = 1$$

Le portefeuille z vérifie donc le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{R}_2 - R_0}{\bar{R}_1 - R_0} = \frac{\sum_j z_j \sigma_{2j}}{\sum_j z_j \sigma_{1j}} \\ \dots \\ \frac{\bar{R}_a - R_0}{\bar{R}_1 - R_0} = \frac{\sum_j z_j \sigma_{aj}}{\sum_j z_j \sigma_{1j}} \\ \dots \\ \frac{\bar{R}_A - R_0}{\bar{R}_1 - R_0} = \frac{\sum_j z_j \sigma_{Aj}}{\sum_j z_j \sigma_{1j}} \end{array} \right.$$

Par définition aussi des z_a , la dernière contrainte se réécrit :

$$(1 - x_0) \sum_{j=1}^A z_a (\bar{R}_a - R_0) = \bar{R} - R_0$$

Aussi, la solution x du programme initial peut être présenté sous la forme (x_0, z) . La stricte convexité du programme impose que z_a est unique. Les $A - 1$ équations étant

indépendantes du rendement exigé \bar{R} , ce portefeuille risqué z est le même quel que soit le rendement exigé. Quel que soit donc \bar{R} , l'agent combine uniquement l'actif certain et le portefeuille z , ce dernier étant identique quel que soit l'agent, quel que soit son rendement exigé.

Proposition 3 *En présence d'un actif sans risque, le portefeuille optimal de chaque agent est obtenu en combinant l'actif certain à un portefeuille risqué dont la composition est constante, indépendante du rendement exigé \bar{R} .*

Comme l'écart-type du portefeuille est $\sigma_p = (1 - x_0)\sigma_p^r$, où σ_p^r est la variance du portefeuille risqué, et que l'excès de rendement (par rapport à l'actif certain) est $\bar{R}_p - R_0 = (1 - x_0)(\bar{R}_p^r - R_0)$, où \bar{R}_p^r est le rendement espéré du portefeuille risqué, alors ce dernier croît linéairement avec l'écart-type :

$$\bar{R}_p - R_0 = \left(\frac{\bar{R}_p^r - R_0}{\sigma_p^r} \right) \sigma_p$$

la droite ainsi définie constitue la droite de marché ; nécessairement pour être un ensemble de choix optimaux, elle doit être tangente à la frontière des portefeuilles efficaces comme l'illustre la figure 11. Selon que le gérant de portefeuille est prudent ou risquophile son point d'équilibre sera sur la droite de marché plus ou moins proche du point R_0 comme l'illustrent les points P et R , points atteints par des pondérations différentes de l'actif sans risque dans le portefeuille.

Références

- [AE01] F.M. Aparicio and J. Estrada, (2001). Empirical distributions of stock returns : European securities markets, 1990-5. *European Journal of Finance*, 7 :1-21, 2001.
- [Bar34] T. Barrois, (1834). *Essai sur l'application du calcul des probabilités aux assurances contre l'incendie*. Lille, 1834.
- [Ber95] P.L. Bernstein, (1995). *Des idées capitales*. Finance. PUF, Paris, 1995. Traduction de "Capital ideas - the improbable origins of modern Wall Street" (1992).
- [Bla88] F. Black, (1988). Option formulas and nikkei options. Working paper, 1988.

- [Bre89] M.J. Brennan, (1989). Capital asset pricing model. In M. Milgate & P. Newman J. Eatwell, editor, *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Stockton Press, N.Y, 1989.
- [CM95] G. Constantinidès and A.G. Malliaris, (1995). Portfolio theory. In R. Jarrow et Alii, editor, *Finance*, chapter 1. Elsevier, 1995. vol. 9 du Handbook in Organizational Research and Management Science.
- [Edg88] F.Y. Edgeworth, (1888). The mathematical theory of banking. *Journal of the Royal Statistical Society*, 1888.
- [Fis06] I. Fisher, (1906). *The nature of capital and income*. MacMillan, 1906.
- [Fis30] I. Fisher, (1930). *Theory of interest*. MacMillan, N.Y, 1930.
- [Hic35] J.R. Hicks, (1935). A suggestion for simplifying the theory of money. *Economica*, février 1935.
- [Hic39] J.R. Hicks, (1939). *Value and capital*. Oxford University Press, 2 ème edition, 1939.
- [Key68] J.M. Keynes, (1936). *Théorie Générale de l'Emploi, de l'Intérêt et de la Monnaie*. Payot, Paris, 1968. Ouvrage traduit par J. de Largentaye et publié en France pour la première fois en 1939.
- [Lin65] R. Lintner, (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47 :13–37, février 1965.
- [Mar38] J. Marschak, (1936). Money and the theory of finance. *Econometrica*, 6 :311–25, 1938.
- [Mer72] R.C. Merton, (1972). An analytical derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7 :1851–72, 1972.
- [Mos66] J. Mossin, (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34 :768–83, 1966.
- [Sha64] W. Sharpe, (1964). Capital asset prices : a theory of market equilibrium under condition of risk. *Journal of Finance*, septembre 1964.

- [Tob58] J. Tobin, (1958). Liquidity preferences as behavior toward risk. *Review of Economic Studies*, 25 :65–86, 1958.
- [Wic96] K. Wicksell, 1896). *Interest and prices*. Londres, 1896. traduction anglaise de R.F Kahn.
- [Wil38] J.B. Williams, (1938). *The theory of investment value*. Harvard University Press, Cambridge, M.A, 1938.