Exercice sur la théorie du portefeuille
portefeuille optimal avec critère espérance-variance

Philippe Bernard
Ingénierie Economique & Financière
Université Paris-Dauphine

Février 2006

On considère un univers de titres constitué de trois titres risqués dont les rendements nets, les volatilités (écart-types), et les coefficients de corrélation sont les suivants :

titres	rend. espérés (%)	volatilité (%)	growth stocks	value stocks	actif monétaire
growth stocks	10	16	1	-0.2	0
value stocks	6	8	-0.2	1	0
actif monétaire	2	1	0	0	1

On suppose que l'investisseur considéré a des préférences représentables par le critère espérance - variance suivant :

$$\overline{r}_p - \frac{\gamma}{2}\sigma_p^2$$

où $\overline{r}_p$ est l'espérance du portefeuille, σ_p^2 sa variance (Attention les unités de $\overline{r}_p$ et de σ_p^2 doivent être homogènes).

Caractérisez les portefeuilles optimaux (= portefeuilles moyenne-variance efficients), puis calculez le portefeuille optimal pour une aversion γ égale à 5 (avec un incrément unitaire).

(1) Si l'actif monétaire est risqué mais non corrélé alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 256.0 & -25.6 & 0.0 \\ -25.6 & 64.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10^{-4})$$

Le programme définissant le choix optimal de portefeuille :

$$\left\{ \begin{array}{c} \max\ \overline{r}_p - \frac{\gamma}{200}\sigma_p^2 \\ \textit{sous la contrainte} : \\ x_0 + x_1 + x_2 = 1 \end{array} \right.$$

($\gamma/200$ et non $\gamma/2$ car les variances obtenues à l'aide de la matrice sont en 10^{-4} alors que les rendements sont en 10^{-2}). Le lagrangien de ce programme s'écrit :

$$L = \overline{r}_p - \frac{100\gamma}{2}\sigma_p^2 - \mu.(x_0 + x_1 + x_2 - 1)$$

(car la fonction objectif est à maximiser et donc le coût imputé en cas de violation de la contrainte budgétaire $\mu.(x_0 + x_1 + x_2 - 1)$ doit être retranché de ce "gain" que l'on cherche à maximiser).

Remarque 1 *On observe que le lagrangien est assez proche par les termes qui le composent (rendement espéré et variance du portefeuille, contrainte budgétaire) du lagrangien que l'on utilise pour les portefeuilles efficients. La différence est ici que l'on se fixe le paramètre permettant de convertir la variance en rendement espéré (et inversement)* λ *et non le rendement à atteindre. Les seules variables endogènes de ce programme sont donc les parts* x_0*,* x_1*,* x_2 *et le multiplicateur* μ *associé à la contrainte budgétaire. Avec le programme que l'on a ici, si l'on voulait récupérer l'ensemble des portefeuilles moyenne-variance efficients, il suffirait ici de faire varier le paramètre* λ*.*

Les conditions marginales peuvent être écrites :

$$\left\{\begin{array}{c} 2-\frac{\lambda}{100}x_0-\mu=0 \\ 10-\frac{\lambda}{100}(256x_1-25.6x_2)-\mu=0 \\ 6-\frac{\lambda}{100}(-25.6x_1+64x_2)-\mu=0 \end{array}\right.$$

ou sous forme matricielle :

$$\frac{\lambda}{100}\left[\begin{array}{ccc} 256.0 & -25.6 & 0.0 \\ -25.6 & 64.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 10 \\ 6 \\ 2 \end{array}\right]-\mu\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{\lambda}{100}\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{x}=\overrightarrow{r}-\mu.\overrightarrow{1}$$

Le portefeuille $\mathbf{x}$ est donc donné par :

$$\mathbf{x}=\frac{100}{\lambda}\left[\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overrightarrow{r}-\mu.\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overrightarrow{1}\right]$$

où $\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overrightarrow{r}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overrightarrow{1}$ sont les deux directions (vecteurs colonnes) que l'on doit suivre pour obtenir le portefeuille optimal. Une méthode de résolution consiste à :

1. calculer la matrice inverse $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$;
2. calculer les deux directions $\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overrightarrow{r}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overrightarrow{1}$;
3. déterminer la valeur de μ compatible avec la contrainte budgétaire pour la valeur de λ que l'on se donne ;
4. réinjecter la valeur de μ dans l'expression de $\mathbf{x}$.

Les calculs (cf aussi fichier Excel) nous donnent :

$$\left[\begin{array}{ccc} 256.0 & -25.6 & 0.0 \\ -25.6 & 64.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc} 4.069\times10^{-3} & 1.6276\times10^{-3} & 0 \\ 1.6276\times10^{-3} & 1.6276\times10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{array}\right]$$

et donc :

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overrightarrow{r} = \begin{bmatrix} 5.0456 \times 10^{-2} \\ 0.11393 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overrightarrow{1} = \begin{bmatrix} 5.6966 \times 10^{-3} \\ 1.7904 \times 10^{-2} \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

L'expression numérique de $\mathbf{x}$ est donc :

$$\mathbf{x} = \frac{100}{\lambda}\left(\begin{bmatrix} 5.0456 \times 10^{-2} \\ 0.11393 \\ 2.0 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 5.6966 \times 10^{-3} \\ 1.7904 \times 10^{-2} \\ 1.0 \end{bmatrix}\right)$$

La contrainte budgétaire que l'on doit vérifier s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 1$$

Le calcul du terme de gauche nous donne :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} &= \frac{100}{\lambda}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.0456 \times 10^{-2} \\ 0.11393 \\ 2.0 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.6966 \times 10^{-3} \\ 1.7904 \times 10^{-2} \\ 1.0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{100}{\lambda}(2.1644 - 1.0236\mu) \end{aligned}$$

Aussi la valeur de μ (en fonction du paramètre λ) est :

$$\frac{100}{\lambda}(2.1644 - 1.0236\mu) = 1$$

et donc :

$$\mu = 2.1145 - 9.7694 \times 10^{-3}\lambda$$

Le portefeuille optimal est alors :

$$\mathbf{x} = \frac{100}{\lambda}\left(\begin{bmatrix} 5.0456 \times 10^{-2} \\ 0.11393 \\ 2.0 \end{bmatrix} - (2.1145 - 9.7694 \times 10^{-3}\lambda) \begin{bmatrix} 5.6966 \times 10^{-3} \\ 1.7904 \times 10^{-2} \\ 1.0 \end{bmatrix}\right)$$

Pour $\lambda = 5$, la valeur du multiplicateur est donc :

$$\mu = 2.1145 - 9.7694 \times 10^{-3}(5) = 2.0657$$

et le portefeuille optimal a pour composition :

$$\mathbf{x} = \frac{100}{(5)}\left(\begin{bmatrix} 5.045\,6 \times 10^{-2} \\ 0.113\,93 \\ 2.0 \end{bmatrix} - (2.114\,5 - 9.769\,4 \times 10^{-3}(5)) \begin{bmatrix} 5.696\,6 \times 10^{-3} \\ 1.790\,4 \times 10^{-2} \\ 1.0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.773\,78 \\ 1.538\,9 \\ -1.313\,1 \end{bmatrix}$$

(Pour la représentation graphique de la frontière des portefeuilles efficients, cf le fichier Excel).