

# Exercice : covariance et gestion du risque

Philippe Bernard

Ingénierie Economique & Financière

Université Paris-Dauphine

Mars 2006

On considère deux actifs dont les rendements et les volatilités sont :

	rendement	volatilité
actif 1	5%	6%
actif 2	10%	16%

Le coefficient de corrélation  $\rho$  est un paramètre du problème. L'univers des titres étant supposé se limiter aux deux actifs, la contrainte budgétaire de tout investisseur s'écrit :

$$x_1 + x_2 = 1$$

**Questions :**

1. Donnez l'expression de l'espérance et de la variance du rendement du portefeuille en fonction seulement de  $x_1$ .
2. Calculez la dérivée de la variance par rapport à  $x_1$  (avec le paramètre  $\rho$ ) ainsi que celle du rendement espéré. Comment évolue le rendement espéré du portefeuille en fonction de  $x_1$  ?
3. Évaluez pour un niveau quelconque de  $\rho$  la dérivée de la variance pour  $x_1 = 0$ . Localement quel est l'effet de d'augmenter  $x_1$  au voisinage de  $x_1 = 0$ . Quelle est donc la forme de la courbe (paramétrée par  $x_1$ ) écart-type - rendement espéré.
4. Similairement au voisinage de  $x_1 = 1$ , à quelle condition sur  $\rho$  la dérivée de la variance par rapport à  $x_1$  sera strictement positive? Quelle sera donc en fonction de  $\rho$ , la forme de la courbe (paramétrée par  $x_1$ ) écart-type - rendement espéré au voisinage de  $x_1 = 1$ .
5. En supposant pour cette question que  $\rho = -1$ , montrez (en utilisant si nécessaire des résultats antérieurs) que la courbe volatilité - rendement espéré sera décroissante au voisinage de  $x_1 = 1$ . Puis montrez qu'il existe un niveau  $x_1^*$  en deça duquel la courbe redevient croissante. Interprétez économiquement ce niveau  $x_1^*$ .
6. (Application Excel) En utilisant Excel tracez les courbes (volatilité, rendement espéré) du portefeuille lorsque  $\rho = -1, -0.5, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ .

## Eléments de correction

(1) Espérance et variance du rendement des portefeuilles

Avec les rendements et les volatilités données, l'espérance (notée  $\bar{r}$ ) et la variance (notée  $\sigma^2$ ) du rendement du portefeuille s'écrivent :

$$\begin{aligned}\bar{r} &= 5x_1 + 10x_2 \\ &= 5x_1 + 10(1 - x_1) \\ &= 10 - 5x_1 \quad (\%) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (6)^2x_1^2 + 2x_1x_2\rho(6)(16) + (16)^2x_2^2 \\ &= (6)^2x_1^2 + 2x_1(1 - x_1)\rho(6)(16) + (16)^2(1 - x_1)^2 \\ &= 36x_1^2 + 192\rho x_1(1 - x_1) + 256(1 - x_1)^2 \end{aligned}$$

(2) Dérivée du rendement espéré et de la variance

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\bar{r} = -5 < 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma^2 &= 72x_1 + 192\rho(1 - 2x_1) - 512(1 - x_1) \\ &= 584x_1 - 512 + 192\rho(1 - 2x_1) \end{aligned}$$

(3) Evaluation au voisinage de  $x_1 = 0$

Pour  $x_1 = 0$ , la dérivée de la variance est égale à :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma^2 = -512 + 192\rho$$

Comme  $\rho \leq 1$ , on a donc que pour  $x_1 = 0$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma^2 \leq -322$$

Comme la dérivée est une fonction continue, lorsque la valeur de  $x_1$  est suffisamment proche de 0, la dérivée de la variance est également négative. Naturellement la volatilité

(qui n'est que la racine carrée de la variance) hérite de ces propriétés de décroissance puisque :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma^2 / \partial x_1}{2\sqrt{\sigma^2}}$$

Comme la volatilité  $\sigma$  et le rendement espéré du portefeuille sont deux fonctions paramétrés par  $x_1$  alors la pente de cette courbe en un point  $x_1$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{d\sigma|_{x_1=0}} &= \frac{\partial \bar{r} / \partial x_1}{\partial \sigma / \partial x_1} \\ &= \frac{-5}{\frac{\partial \sigma^2 / \partial x_1}{2\sqrt{\sigma^2}}} \\ &= -\frac{10\sqrt{\sigma^2}}{\partial \sigma^2 / \partial x_1} \end{aligned}$$

Comme au voisinage de  $x_1 = 0$ , on a  $\partial \sigma^2 / \partial x_1 < 0$ , on a donc que le courbe reliant volatilité et rendement espéré est croissante :

$$\frac{d\bar{r}}{d\sigma|_{x_1=0}} > 0$$

(4) Pour  $x_1 = 1$ , la dérivée en ce point de la variance est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} &= 584(1) - 512 + 192\rho(1 - 2(1)) \\ &= 72.0 - 192.0\rho \end{aligned}$$

Pour que la dérivée soit positive, il est donc nécessaire que  $\rho$  soit suffisamment faible :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} > 0 \Leftrightarrow \rho < \frac{72}{192} = 0.375$$

En utilisant les résultats antérieurs sur le lien entre la dérivée de la variance et celle de la volatilité, la valeur de la pente de la courbe volatilité rendement, on a donc que cette courbe sera croissante au voisinage de  $x_1 = 1$  si  $\rho > 0.375$  :

$$\rho > 0.375 \Leftrightarrow \frac{d\bar{r}}{d\sigma|_{x_1=1}} > 0$$

(5) Pour  $\rho = -1$ , la dérivée de la variance vaut en tout point  $x_1$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma^2 &= 584x_1 - 512 + 192(-1)(1 - 2x_1) \\ &= 968x_1 - 704 \end{aligned}$$

Naturellement, pour  $x_1 = 1$  on a que la dérivée est positive :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma^2 = 264$$

et donc que localement la dérivée  $\frac{d\bar{r}}{d\sigma}|_{x_1=1} < 0$ .

Comme en  $x_1 = 0$ , on a par contre  $\frac{d\bar{r}}{d\sigma}|_{x_1=0} > 0$ , la continuité de la dérivée assure qu'il existe au moins une valeur de  $x_1$  pour laquelle la dérivée est nulle. Comme la dérivée est croissante de  $x_1$ , il en existe au plus une. Cette valeur de  $x_1$  est donc :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{704}{968} = 0.72727$$

et donc :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma^2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > 0.72727$$

On a donc :

$$\frac{d\bar{r}}{d\sigma}|_{x_1} = \begin{cases} < 0 & \text{si } x_1 < 0.72727 \\ \geq 0 & \text{si } x_1 \geq 0.72727 \end{cases}$$

Pour  $x_1^* = 0.72727$ , on remarque que :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 36(0.72727)^2 + 192(-1)(0.72727)(1 - 0.72727) + 256(1 - 0.72727)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lorsque  $\rho = -1$ , le niveau  $x_1^*$  est donc non celui qui minimise la variance (et la volatilité), mais aussi celui qui permet d'annuler complètement le risque. Les proportions  $x_1 = 0.72727$  et  $x_2 = 0.27273$  sont celles qui permettent d'annuler le risque que fait courir l'actif 1 grâce à la présence de l'actif 2. Il faut donc combiner les actifs 1 et 2 dans une proportion égale à  $0.27273/0.72727 = 0.37501$  actif 2 pour chaque actif 1 pour obtenir une couverture complète des risques de ce dernier. Au delà de la part  $x_1 = 0.72727$ , la proportion de l'actif 2 devient trop grande et donc le risque recommence à augmenter.