

# La théorie du portefeuille : *une introduction*

Philippe Bernard

Ingénierie Economique & Financière

Université Paris-Dauphine

Avril 2006

# 1 Risque et analyse économique

La possibilité d'épargner pour un ménage, une entreprise, de réaliser des placements sur les marchés financiers conduit à soulever deux questions : quel est le montant d'épargne souhaité ? quelle est sa structure ?

Bien que les réponses à ces deux questions ne soient pas nécessairement indépendantes l'une de l'autre, il est assez naturel de les considérer isolément dans un premier temps. La théorie du portefeuille développée à la suite des travaux pionniers de HARRY MARKOWITZ ([Mar52], [Mar59]) a pour objet de répondre à la seconde question : si l'on se donne un montant à investir sur les marchés financiers, quelle doit être la structure de cet investissement, quels sont les titres que l'on doit sélectionner et dans quelles proportions ? Pour cela, elle a mobilisé les ressources des mathématiques pour l'optimisation, de l'informatique pour la mise en oeuvre, et surtout de la théorie des choix dans l'incertain pour la formalisation économique.

Pourtant l'émergence d'un outil économique capable d'analyser les problèmes liés à l'incertitude se fit avec difficulté. La théorie économique qui s'était progressivement développée du *XIX<sup>ème</sup>* siècle jusqu'à *Value and Capital* de JOHN HICKS [Hic39], était essentiellement statique et supposait une information parfaite, une absence de risque. En dépit des efforts de BERNOULLI, les applications de la théorie des choix dans l'incertain à l'économie furent très rares. Parmi elles, on peut relever la théorie d'EDGEWORTH [Edg88] sur la couverture des dépôts bancaires. Cependant, on hésita longtemps sur la représentation, la mesure du risque comme en témoignent les tergiversations d'IRVING FISHER, pourtant un des pères de la théorie économique de la finance par ses travaux sur l'actualisation. Dans l'appendice de *The nature of capital and income* [Fis06], IRVING FISHER analysa les rendements des actifs financiers en terme de distributions et y proposa de mesurer par l'écart-type l'incertitude affectant les rendements. Mais, vingt plus tard, dans le chapitre XIV de son *Theory of Interest* [Fis30] il affirma que l'analyse du risque ne relevait pas de l'analyse mathématique ! Dans la théorie monétaire des années 30, les travaux pionniers de HICKS [Hic35] [Hic39], MARSCHAK [Mar38] recoururent au critère espérance/variance, et MARSCHAK [Mar38] lui-même poussa même l'audace jusqu'à exprimer les préférences sur l'investissement par des courbes d'indifférence dans le repère espérance / variance.

Néanmoins, en dehors de ces valeureux efforts, la théorie de la finance hésitait à s'aventurer dans l'incertain. Ainsi, le manuel de référence de WILLAMS [Wil38] était avant tout consacré à l'actualisation ; lorsque KEYNES [Key68] prétendit prendre en compte le risque

dans son efficacité marginale du capital, il se contenta en fait d'introduire une prime de risque *ad hoc* pour les actifs risqués.

La théorie du portefeuille fut donc totalement tributaire du renouveau de la théorie des choix dans l'incertain qui suivit les travaux de VON NEUMANN (et MORGENSTERN). Le fondateur de la théorie du portefeuille, HARRY MARKOWITZ, s'engouffra ainsi dans le sillon tracé en économie et en mathématiques pour proposer une approche à partir de laquelle la théorie de la finance se développa très rapidement. A la différence de MARCHAK et de KEYNES qui avait concentré leur attention sur l'investissement, MARKOWITZ concentra la sienne sur le problème de la diversification :

“Before Markowitz could propose the “expected return-variances of returns” rule, he first had to discredit the then widely accepted principle that an investor chooses a portfolio by selecting securities that maximize discounted expected returns. Markowitz points out that if an investor follows this rule, his or her portfolio will consist of only one stock, namely that the highest discounted expected return, which is contrary to the observed phenomenon of diversification. *Therefore a rule of investor portfolio which does not yield portfolio diversification must be rejected.* [...] Markowitz then proposes the expected mean returns - variances of returns M - V rule. He concludes that the M - V rule not only implies diversification, it actually implies *the right kind of diversification for the right reason.*” ([CM95] pp.2-3)

Ce chapitre est consacré à la présentation de la théorie du portefeuille développée par MARKOWITZ et à une de ses extensions, le théorème des deux fonds. Dans la première section est présenté le cadre économique de cette théorie du portefeuille. Puis la notion de portefeuille efficient est exposée. Les mécanismes de gestion du risque implicites à l'approche de Markowitz sont ensuite précisés. L'ensemble des opportunités du marché, la frontière des portefeuilles efficients, est ensuite caractérisé. Enfin, le théorème des deux fonds, dont le corollaire est l'optimalité de la gestion indicielle, est présenté.

## 2 Le cadre

La théorie du portefeuille développée par Markowitz est une théorie statique. On considère seulement des situations où ne sont prises en compte que deux périodes : la période initiale (période 0) où les agents considérés doivent déterminer leurs portefeuilles

financiers ; la seconde période (période  $T$ ) où les rendements des actifs sont constatés, la valeur terminale des portefeuilles déterminée.

## 2.1 Les rendements

Sur les marchés financiers sont échangés différents actifs risqués  $a = 1, \dots, A$ .<sup>1</sup> Le prix de l'actif  $a$ , noté  $q_a$ , est fixé et payé à la période 0. A la seconde période, la période  $T$ , la détention de l'actif  $a$  "rapporte" le revenu a priori incertain  $\tilde{V}_a$ .<sup>2</sup> Le prix et le revenu aléatoire définissent donc le rendement (brut) aléatoire du titre  $\tilde{R}_a$  :

$$\tilde{R}_a = \frac{\tilde{V}_a}{q_a} \quad (1)$$

et son rendement net :

$$\tilde{r}_a = \frac{\tilde{V}_a}{q_a} - 1 \quad (2)$$

Même si cette hypothèse n'est pas nécessaire pour la plupart des résultats de la théorie du portefeuille, on suppose ici que les agents estiment sans erreur les distributions de ces rendements, et donc évaluent correctement les rendements espérés et la matrice de covariance.

Si l'on considère l'ensemble des actifs risqués, on note  $\sigma$  la matrice des covariances de leurs rendements :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1a} & \dots & \sigma_{1A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{a1} & \dots & \sigma_a^2 & \dots & \sigma_{aA} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{A1} & \dots & \sigma_{Aa} & \dots & \sigma_A^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

où  $\sigma_{ab}$  est la covariance des rendements des actifs  $a$  et  $b$  :

$$\forall a, b \in \{1, \dots, A\} : \sigma_{ab} = \sigma(\tilde{R}_a, \tilde{R}_b) \quad (4)$$

Naturellement,  $\sigma_a^2 = \sigma_{aa} = \sigma(\tilde{R}_a, \tilde{R}_a)$  est la variance du rendement de l'actif  $a$ . La première ligne de la matrice rassemble ainsi les covariances entre les rendements de l'actif 1

---

<sup>1</sup>Si l'on considère des économies comprenant des actifs certains, l'actif certain représentatif sera l'actif 0.

<sup>2</sup> $\tilde{V}_a$  est supposé résumer exhaustivement tous les gains induits par la détention. Par conséquent, il est déterminé non seulement par les revenus livrés (dividendes, intérêts, etc.) mais aussi par le prix auquel on peut revendre l'actif sur le marché secondaire.

et les rendements des titres (y compris l'actif lui-même). Similairement, la  $a$  – ème ligne rassemble les covariances entre les rendements de l'actif  $a$  et les rendements des titres  $1, 2, \dots, A$ . On note  $\sigma_{(a)}$  la  $a$  – ème ligne de la matrice des covariances. Comme les rendements nets diffèrent des rendements bruts uniquement par une constante ( $\tilde{r} = \tilde{R} - 1$ ), les covariances des rendements nets sont également données par la matrice  $\sigma$  :

$$\forall a, b \in \{1, \dots, A\} : \sigma_{ab} = \sigma(\tilde{R}_a, \tilde{R}_b) = \sigma(\tilde{r}_a, \tilde{r}_b)$$

La matrice de covariance est supposée être de plein rang et donc est supposée inversible.

Le rendement espéré de chaque actif  $a$  est noté  $\bar{R}_a$ .  $\mathbf{R}$  est le vecteur colonne formé par les différents rendements espérés :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \dots \\ \bar{R}_a \\ \dots \\ \bar{R}_A \end{bmatrix} \quad (5)$$

## 2.2 La contrainte budgétaire

Chaque agent dans l'économie est supposé disposer d'une richesse initiale  $W$  qu'il doit investir dans les actifs financiers disponibles. Les caractéristiques de ceux-ci étant définies, le seul problème pour chaque agent est de déterminer les quantités de chaque actif qu'il désire acheter ou vendre. Les prix étant donnés, on peut mesurer ces ventes et ces achats soit par leurs quantités, soit par leurs valeurs. On peut aussi les mesurer en rapportant les montants de ces opérations à la richesse initiale. Ainsi, si  $I_a$  est le montant investi dans le titre  $a$ <sup>3</sup>, alors on notera  $x_a$  le ratio obtenu en rapportant  $I_a$  à la richesse initiale :

$$x_a = \frac{I_a}{W} \quad (6)$$

Si l'agent investit dans le titre  $a$ , on a  $I_a > 0$  et  $x_a$  correspondra alors à la part de sa richesse qu'il investit dans le titre  $a$ .

Les montants  $I_a$  et les parts  $x_a$  sont évidemment soumis à la contrainte budgétaire et aux contraintes mises en place par les autorités de marché. Celles-ci peuvent notamment autoriser ou non les ventes à découvert, c'est-à-dire la vente de titres financiers (par

---

<sup>3</sup> $I_a$  peut être positif, nul ou négatif a priori. Evidemment si  $I_a < 0$ , le montant correspondra à la recette engendrée par les quantités vendues du titre  $a$ .

exemple l'action Peugeot) que l'on ne possède pas. Dans le cadre abstrait de la théorie du portefeuille, où les titres financiers ne sont que des promesses de livraison de revenus futurs, la vente à découvert d'un titre revient à promettre de livrer les revenus du titre vendu. Dans la réalité, la vente à découvert est une opération qui conduit le vendeur à racheter sur le marché le titre vendu juste avant de le livrer à l'acheteur.<sup>4</sup> Dans le cadre de la théorie (élémentaire) du portefeuille, on suppose que les marchés sont suffisamment parfaits pour permettre les ventes à découvert. La seule contrainte financière supportée par les agents est donc la contrainte budgétaire. Pour chaque montant  $I_a$  ou pour chaque part  $x_a$ , on peut distinguer les achats des ventes en introduisant les notations suivantes :

- les mesures des achats

$$I_a^+ = \max(I_a, 0), \quad x_a^+ = \max(x_a, 0) \quad (7)$$

- les mesures des ventes

$$I_a^- = -\min(I_a, 0), \quad x_a^- = -\min(x_a, 0)$$

Avec ces notations, pour un individu disposant d'une richesse de  $100e$  investissant  $10e$  dans l'action Axa et vendant à découvert  $20e$  de l'action Michelin, on aura donc :

- pour l'action Axa

$$I_{Axa} = 10, \quad x_{Axa} = 0.1 \Rightarrow I_{Axa}^+ = 10, \quad I_{Axa}^- = 0, \quad x_{Axa}^+ = 0.1, \quad x_{Axa}^- = 0$$

---

<sup>4</sup>La vente à découvert est dans la réalité une procédure relativement rare notamment en raison de son coût. Celui-ci découle des appels de marge, et des mises en garantie exigés par les chambres de compensation pour couvrir les positions. Historiquement, les ventes à découvert étaient même initialement des opérations exceptionnelles. Le mécanisme du repo (repurchase agreements), qui furent développés initialement aux Etats-Unis dans les années 1920, fut sans doute un des premiers mécanismes rendant possible la vente à découvert. Cependant, l'importance de celles-ci demeure limitée. Ainsi, selon les données citées par ALLEN & GALE [1994] ([AG94] p. 81), les ventes à découvert auraient représenté seulement 8% des transactions du New York Stock Exchange en 1986. Au surplus, la plupart de celles-ci auraient été le fait des courtiers. Les ventes à découvert par les non-membres des échanges n'auraient donc représenté que 1.5% des transactions. Cependant, l'hypothèse de ventes à découvert peut être réaliste pour certains actifs ou marchés. En effet, il est possible de réaliser de fait des ventes par découvert sans supporter les coûts élevés de courtage en passant par les marchés d'options s'ils existent. Certaines combinaisons d'options de vente et d'options d'achat sont en effet équivalentes à des ventes à découvert (du sous-jacent). FIGLEWSKI & WEBB [1993] [FW93] ont soutenu qu'en pratique une part importante des transactions sur les marchés d'options vise à réaliser ces synthèses de ventes à découvert. De même, le recours à des futures sur indices permet d'en réaliser à peu de frais.

– pour l'action Michelin

$$I_{Michelin} = -20, x_{Axa} = -0.2 \Rightarrow I_{Axa}^+ = 0, I_{Axa}^- = 20, x_{Axa}^+ = 0, x_{Axa}^- = 0.2$$

Pour financer les achats, chaque agent peut utiliser soit sa richesse initiale, soit la recette tirée des ventes à découvert, la contrainte de valeurs s'écrit :

$$\text{valeur des achats} = \text{richesse initiale} + \text{recette des ventes}$$

Avec les notations utilisées, on a donc :

$$\sum_a I_a^+ = W + \sum_a I_a^-$$

ou encore :

$$\sum_a (x_a^+ W) = W + \sum_a (x_a^- W)$$

En éliminant  $W$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_a x_a^+ &= 1 + \sum_a x_a^- \\ \sum_a x_a^+ - \sum_a x_a^- &= 1 \end{aligned}$$

Mais pour chaque titre, on a :

$$x_a^+ - x_a^- = x_a$$

la contrainte budgétaire implique le respect de la contrainte suivante pour les parts ( $x_a$ ) :

$$\sum_a x_a = 1 \tag{8}$$

En notant  $\mathbf{x}$  le vecteur colonne défini par les différents  $x_a$ ,  $\mathbf{1}$  le vecteur colonne dont les  $A$  composantes sont égales à 1 :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_a \\ \dots \\ x_A \end{bmatrix}, \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

alors comme  $\sum_a x_a = \mathbf{1}^\top \mathbf{x}$ , la contrainte budgétaire (définie sur les parts  $x_a$ ) s'écrit aussi sous forme vectorielle :

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \tag{9}$$

où  $^\top$  est le symbole de la transposition des vecteurs (ou des matrices).

**Hypothèse 1** *Les choix de portefeuille possibles sont les parts  $(x_a)_{a=1}^A$  vérifiant :*

$$\forall a : x_a \in \mathbb{R} \quad (\text{vente à découvert possible})$$

*ainsi que la contrainte budgétaire :*

$$\sum_a x_a = 1$$

### 3 Finance quadratique et portefeuilles efficients

Comme il a été précisé plus haut, la seule décision prise est la composition du portefeuille, i.e. la détermination des différents  $x_a$ . Entre la période initiale,  $t = 0$ , et la seconde période,  $t = T$ , le portefeuille sélectionné est conservé. En  $t = T$ , l'agent observe la valeur terminale de son patrimoine que l'on note  $\widetilde{W}$ . Dans la théorie du portefeuille, cette richesse terminale est déterminée uniquement la valeur du portefeuille, cette dernière étant égale au produit de la richesse initiale  $W$  et du rendement du portefeuille, noté  $\widetilde{R}_p$  :

**Hypothèse 2** *La richesse terminale est égale à la valeur terminale du portefeuille :*

$$\widetilde{W} = \widetilde{R}_p \cdot W$$

Sous cette hypothèse, les préférences des investisseurs sont supposées être définies sur cette richesse terminale et sur elle seule. La restriction fondamentale sur les préférences introduites par la théorie du portefeuille à la Markowitz est que les préférences dépendent seulement des deux premiers moments de la richesse terminale : son espérance (notée  $\mathbf{E}[\widetilde{W}]$ ) et sa variance (notée  $\sigma^2(\widetilde{W})$ ) :

**Hypothèse 3** *Les préférences de chaque agent sur la richesse terminale sont résumées par une fonction d'utilité définie sur son espérance et sa variance :*

$$U = U(\mathbf{E}[\widetilde{W}], \sigma^2(\widetilde{W})) \quad (10)$$

*Cette fonction d'utilité est croissante par rapport à l'espérance de la richesse terminale, décroissante par rapport à sa variance :*

$$U'_1(\mathbf{E}[\widetilde{W}], \sigma^2(\widetilde{W})) > 0, \quad U'_2(\mathbf{E}[\widetilde{W}], \sigma^2(\widetilde{W})) < 0$$

Comme  $W$  est une donnée, l'indice d'utilité peut être redéfini uniquement sur l'espérance et la variance du rendement, seules variables affectées par les décisions des agents. On peut alors pour une richesse initiale donnée, définir l'utilité en introduisant la fonction  $V$  suivante :

$$\begin{aligned} V & : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R} \\ V(\bar{R}_p, \sigma_p^2) & = U(\bar{R}_p W, \sigma_p^2 W^2) \end{aligned}$$

où :

$$\bar{R}_p = \mathbf{E}[\tilde{R}_p], \quad \sigma_p^2 = \sigma^2(\tilde{R}_p)$$

Naturellement, la fonction  $V$  est supposée croissante par rapport au rendement espéré :

$$V_1(\bar{R}_p, \sigma_p^2) > 0$$

et décroissante de la variance :

$$V_2(\bar{R}_p, \sigma_p^2) < 0$$

Cette restriction espérance variance sur les préférences permet de représenter simplement l'arbitrage entre le rendement (moyen) et le risque (mesuré par la variance). Elle implique cependant que l'on néglige les autres moments de la distribution des rendements. Par exemple celui représentant l'asymétrie de la distribution des rendements (la skewness) ou celui mesurant l'importance relative des événements extrêmes (la kurtosis). Plusieurs justifications peuvent être avancées à cette hypothèse espérance variance (voir annexe). Certaines exploitent les propriétés de certaines fonctions d'utilités élémentaires pour montrer que l'utilité espérée dépend pour celles-ci uniquement de l'espérance et de la variance. D'autres justifications posent des restrictions sur la distribution des rendements. L'une des plus fréquentes est de supposer que les rendements suivent des lois normales ou log-normales. On peut en effet montrer (cf encore une fois l'annexe) que si les préférences vérifient les hypothèses de l'utilité espérée et que les distributions des rendements sont normales ou log-normales alors les préférences peuvent être exhaustivement définies dans l'espace rendement espéré variance. Cette hypothèse de normalité (ou de log-normalité) est séduisante car les distributions des rendements des titres et des indices peuvent souvent **en première approximation** être raisonnablement représentées par de telles distributions (comme l'illustrent les deux figures 1 et 2).

Dans le cadre adopté, sous les hypothèses 1, 2 et 3, le problème de la sélection d'un portefeuille revient alors à déterminer les parts  $(x_a)_{a=1}^A$  qui vérifient la contrainte budgétaire

**Distribution des rendements de l'indice MSCI Monde, 1920 - 2001**  
(données annuelles, rendements discrets)

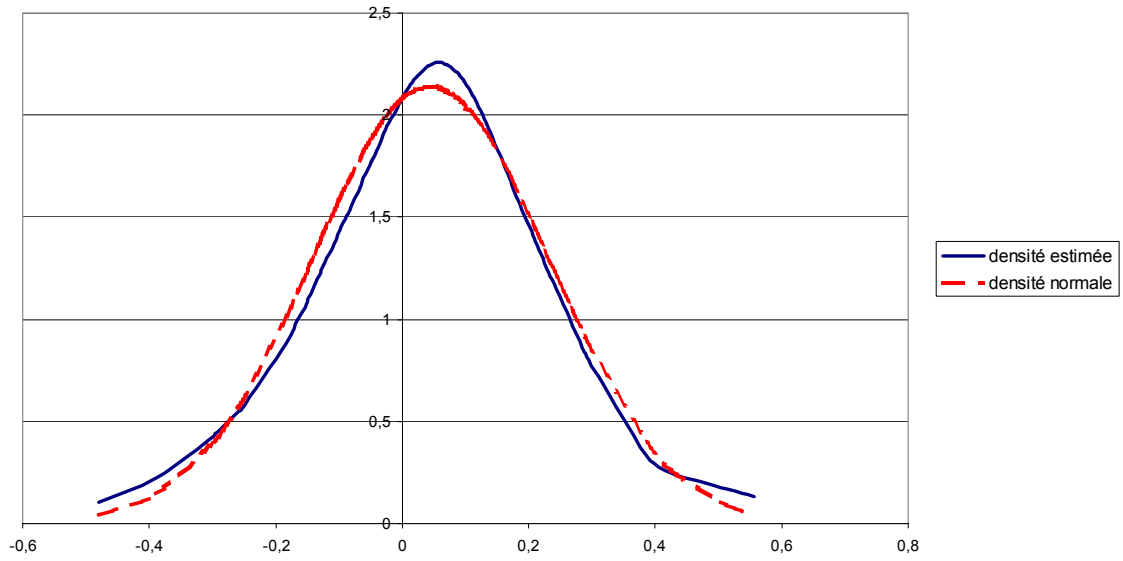


FIG. 1 –

**La distribution des rendements du S&P 500, 1801-2001**  
(données annuelles, rendements discrets)

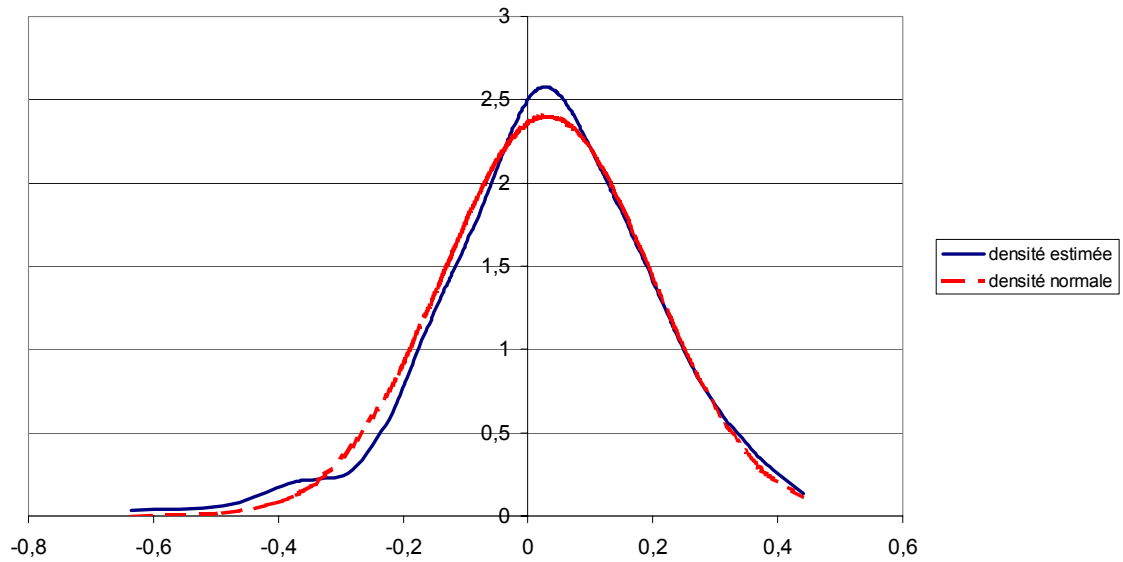


FIG. 2 –

et maximisent sa fonction d'utilité  $V$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{(x_a)_{a=1}^A} V(\bar{R}_p, \sigma_p^2) \\ \text{sous la contrainte :} \\ \sum_{a=1}^A x_a = 1 \end{array} \right.$$

où le rendement espéré du portefeuille  $\bar{R}_p$  et sa variance  $\sigma_p^2$  sont déterminées notamment par le choix de  $(x_a)_{a=1}^A$ . La solution de ce problème dépend de deux séries de données. D'abord les données du marché qui permettent de déterminer les espérances et les (co)variances. Ensuite les données sur les préférences de chaque agent, c'est-à-dire les arbitrages entre le rendement et le risque qu'il est susceptible d'accepter. Ces dernières données étant propres à chaque agent, plutôt que de résoudre pour chacun d'entre eux le problème d'optimisation défini plus haut, il est apparu très vite que l'on pouvait utilement décomposer la détermination des portefeuilles optimaux en deux étapes. En effet, tout portefeuille optimal  $(x_a)_{a=1}^A$  dont le rendement moyen et la variance sont  $\bar{R}_p$  et  $\sigma_p^2$  vérifient nécessairement les deux propriétés suivantes :

- pour un niveau de variance égal à  $\sigma_p^2$ , il n'existe aucun autre portefeuille satisfaisant la contrainte budgétaire et dont le rendement espéré est strictement supérieur à  $\bar{R}_p$  ;
- pour un niveau de rendement espéré égal à  $\bar{R}_p$ , il n'existe aucun autre portefeuille satisfaisant la contrainte budgétaire et dont la variance soit strictement inférieure à  $\sigma_p^2$ .

Autrement dit, le portefeuille optimal  $(x_a)_{a=1}^A$  est nécessairement un portefeuille qui soit maximise le rendement espéré pour un niveau de variance (inférieure ou) égale à  $\sigma_p^2$ , soit minimise la variance pour un niveau de rendement espéré (supérieur ou) égal à  $\bar{R}_p$ . Le portefeuille optimal est donc à trouver dans l'ensemble des *portefeuilles efficaces*, i.e. dans les solutions d'un des deux programmes suivants :

$$P_{\min}(\hat{R}) : \left\{ \begin{array}{l} \min_{(x_a)_{a=1}^A} \sigma_p^2 \\ \text{les contraintes :} \\ \bar{R}_p \geq \hat{R} \\ \sum_{a=1}^A x_a = 1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad P_{\max}(\hat{\sigma}) : \left\{ \begin{array}{l} \max \bar{R}_p \\ \text{les contraintes :} \\ \sigma_p^2 \leq \hat{\sigma}^2 \\ \sum_{a=1}^A x_a = 1 \end{array} \right.$$

où  $\hat{R}$  et  $\hat{\sigma}$  sont des niveaux (arbitraires) de rendement espéré et de volatilité que l'on se donne pour objectif.

Ces portefeuilles efficaces dépendent uniquement des données du marché, i.e. des rendements espérés et des (co)variances. En balayant les valeurs possibles de  $\widehat{R}$  (ou de  $\widehat{\sigma}$ ), on est conduit à déterminer l'ensemble des couples (variance, espérance) ou (écart-type, espérance) des portefeuilles efficaces. Cet ensemble est appelé la *frontière des portefeuilles efficaces* et il résume l'ensemble des opportunités d'investissement efficaces sur le marché.

Aussi, comme l'ensemble des opportunités d'investissement est le même pour tous les agents, pour déterminer les portefeuilles optimaux de différents agents en évitant de dupliquer les calculs, on procède en deux étapes :

1. la première où l'on détermine la *frontière d'efficacité des portefeuilles* ;
2. la seconde où on détermine pour chaque agent l'élément de la frontière qu'il préfère.

## 4 Les mécanismes de diversification

Si l'on considère le programme  $P_{\min}(\widehat{R})$ , l'activité de sélection des portefeuilles apparaît dans sa dimension de gestion de risque. La cible de rendement espéré étant fixée, le problème est en effet de trouver des mécanismes de gestion des risques. Le mécanisme de diversification caractéristique de l'assurance est évidemment l'un deux. Mais la contribution de Markowitz est d'avoir attiré l'attention sur un nouveau mécanisme reposant sur la prise en compte des covariances des rendements des titres.

### 4.1 Les effets de la diversification “traditionnelle”

Comme l'utilité de l'agent est décroissante du risque, de la variance  $\sigma_p^2$  du portefeuille, une dimension essentielle des choix de portefeuille est la diversification de celui-ci pour en limiter la volatilité. Un résultat classique (pour les portefeuilles équipondérés) est que la variance est décroissante du nombre d'actifs. Pour démontrer cela, on note  $\bar{\sigma}$  la covariance moyenne lorsque  $A \mapsto +\infty$ , on suppose que les covariances et les variances des actifs sont uniformément bornées :

$$V := \max_a \sigma_a^2 < +\infty \tag{11}$$

La variance du portefeuille peut s'écrire :

$$\sigma_p^2 = \sum_{a=1}^A x_a^2 \sigma_a^2 + \sum_{a=1}^A \sum_{b \neq a} x_a x_b \sigma_{ab} \quad (12)$$

$$= RP + RS \quad (13)$$

avec :

$$RP = \sum_{a=1}^A x_a^2 \sigma_a^2$$

$$RS = \sum_{a=1}^A \sum_{b \neq a} x_a x_b \sigma_{ab}$$

$RP$  est le risque propre induit par les variances des différents actifs,  $RS$  le risque "systématique" déterminé par les corrélations. Si le portefeuille est équipondéré, alors  $x_a = 1/A$  et donc :

$$RP \leq \frac{V}{A} \quad (14)$$

puisque  $\sum_{a=1}^A x_a^2 \sigma_a^2$  est la somme de  $A$  termes inférieurs à  $V/A^2$ . Naturellement, lorsque  $A \rightarrow +\infty$ , le risque propre disparaît au niveau agrégé en raison de la mutualisation opérée :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} RP = 0 \quad (15)$$

Le risque "systématique" peut se réécrire à l'aide de la covariance moyenne :

$$RS = \sum_{a=1}^A \sum_{b \neq a} x_a x_b \sigma_{ab}$$

$$= \frac{A^2 - A}{A^2} \bar{\sigma}_A$$

$$= \bar{\sigma}_A - \frac{\bar{\sigma}_A}{A}$$

où  $\bar{\sigma}_A$  est la covariance moyenne des  $A$  actifs. Lorsque  $A \rightarrow +\infty$ ,  $\bar{\sigma}_A \rightarrow \bar{\sigma}$  et donc  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\bar{\sigma}_A}{A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\bar{\sigma}}{A} = 0$ . Par conséquent asymptotiquement le risque systématique tend vers la limite définie par la covariance moyenne des actifs du marché :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} RS = \bar{\sigma} \quad (16)$$

La diversification d'un portefeuille équipondéré tend à faire converger la variance vers un plancher défini par le seul risque systématique, convergence illustrée par le classique graphique .

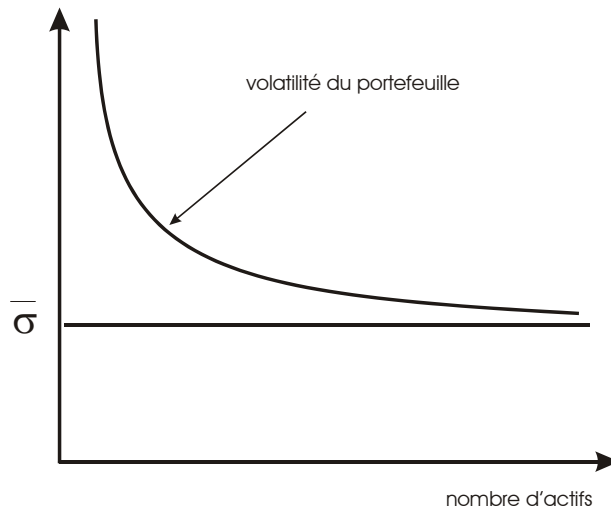


FIG. 3 – La réduction de la volatilité du portefeuille à la volatilité systématique par sa diversification.

Concrètement, la diversification opère même plus rapidement que ne le laisse prévoir ce résultat asymptotique. En effet, il ressort de l'ensemble des études empiriques sur la diversification qu'un portefeuille de 20 titres (voire seulement de 10) est suffisant pour assurer la convergence de la volatilité d'un portefeuille équipondéré. Ainsi, si l'on reprend l'exemple donnée par FABRICE RIVA [2002] [Riv02] où l'on considère un échantillon de 50 titres français sur la période 1985-1991 (en données quotidiennes), la relation entre le nombre de titres composant le portefeuille et sa volatilité est celle reportée sur la figure 4.<sup>5</sup> La variance pour 1 titre va de un à six (de 0.0002 à 0.0012), de deux titres de un à trois (de 0.0002 à 0.0006). Très rapidement cette fourchette se resserre et la moyenne (trait plein de la figure) passe de 0.0006 à 0.0002. Au delà de 15 titres, la baisse de la variance n'est plus perceptible.

---

<sup>5</sup>Les données sont celles mises en ligne par Fabrice Riva sur le site du CEREG. Les 50 sociétés sont LVMH, S.A. de Télécommunications, Credit National Lyonnaise des Eaux - Dumez, Legrand, Esso, S.A.F., Cie La Hélin, Institut Mérieux, International Immobilière Phénix, Printemps (AU), Cie Signaux Equipement, BHV, Auxiliaire d'entreprises, CFI-Cie Foncière Internationale, Cetelem, Comptoir des entrepreneurs, Bouygues, B.S.N., U.I.S, Bail Equipement, Cie Bancaire, Club Méditerranée, Cie des gaz Petrofigaz Primagaz, Entreprise Jean Lefevre, Total Certificat, Credit Foncier de France, G.T.M. Entrepouse, La Radiotechnique, SOGERAP, Eurafrance, D.M.C., SAGEM, Cie Générale des Eaux, SIMCO, SEFIMEG, Moulinex, Casino Guichard-Perrachon & Cie, Carrefour Supermarchés, Total, Galerie Lafayette, Locindus-Cie Financière, Location IMM., SILIC, Bail Investissement, L'Oréal, Skis Rossignol, Société Bic, Alsacienne Supermarchés, Financière Robur, Sté Alsacienne de développement expansion.

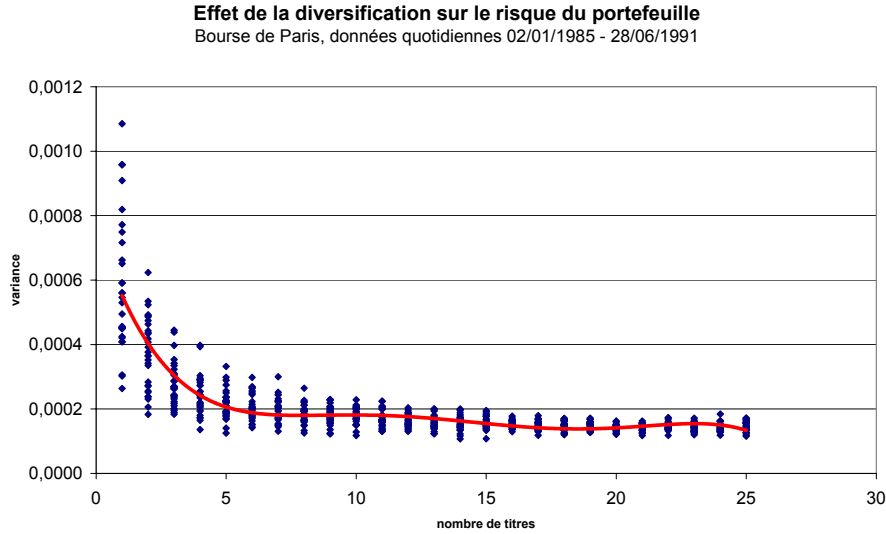


FIG. 4 –

## 4.2 La diversification à la Markowitz

La diversification “traditionnelle” n’est évidemment pas une découverte de la théorie du portefeuille. Elle est connue depuis que l’assurance est pratiquée, depuis donc sans doute des temps immémoriaux. La contribution de la théorie du portefeuille est seulement de montrer que ce mécanisme joue partiellement même lorsqu’un risque systématique existe.

La véritable contribution de la théorie du portefeuille et de Markowitz en particulier, fut de souligner qu’à *nombre d’actifs donné il existe une autre méthode de diversification possible*. Cette diversification ne cherche pas à jouer sur le risque propre mais sur le risque systématique. Le niveau de celui dépendant des covariances et donc des différents coefficients de corrélation  $\rho_{ab}$  :

$$\rho_{ab} := \frac{\text{cov}(\tilde{R}_a, \tilde{R}_b)}{\sigma_a \sigma_b} \quad (17)$$

le risque systématique est donc cruciallement dépendant de la corrélation des actifs pris en compte. Ainsi, supposons que l’on dispose des titres du tableau 1. Il existe deux types de titres : celles des petites capitalisations (small values) et celles des grandes (big values) dont les rendements moyens et écart-types correspondent approximativement aux données américaines de la période 1926-1998. Une seconde dimension des titres est le secteur d’activité des entreprises. Certains secteurs sont étroitement corrélés entre eux, d’autres

TAB. 1 – Un ensemble d’actifs disponibles : exemple

	small values		big values	
	rend. moyen	écart- type	rend. moyen	écart- type
secteur i	16%	32%	10%	20%

TAB. 2 – La matrice corrélation des titres selon les secteurs : exemple

	secteur A	secteur B	secteur C	secteur D	secteur E
secteur A	1	0.5	0	-0.5	-1
secteur B		1	0.5	0	-0.5
secteur C			1	0.5	0
secteur D				1	0.5
secteur E					1

plus faiblement, enfin d’autres peuvent être même négativement corrélés. Pour simplifier, on supposera pour simplifier que la corrélation de deux titres appartenant au même secteur est parfaite (égale à 1).

Pour simplifier, supposons que l’on cherche à construire un portefeuille comprenant uniquement des big values du secteur A que l’on combine à des small values des différents secteurs. Le rendement moyen de ce portefeuille sera alors :

$$\mathbf{E}[\tilde{r}_p] = \alpha.16\% + (1 - \alpha).10\% \quad (18)$$

où  $\alpha$  est la part des small values.

Si l’on calcule maintenant la variance du portefeuille on a alors :

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \alpha^2.(32)^2 + 2\alpha(1 - \alpha).(32)(20)\rho + (1 - \alpha)^2(20)^2 \\ &= 1024\alpha^2 + 1280\alpha(1 - \alpha)\rho + 400(1 - \alpha)^2 \\ &= 1280\alpha(1 - \alpha)\rho + 1024\alpha^2 + 400(1 - \alpha)^2 \end{aligned}$$

On peut chercher à déterminer les couples variance / rendement moyen que l’on obtient selon la pondération (de  $\alpha = 0$  à  $\alpha = 1$  pour simplifier) et selon le secteur des small values que l’on apparie aux big values du secteur A. Pour chaque rendement net  $r$  que l’on vise à atteindre on peut ainsi déterminer la part  $\alpha$  nécessaire :

$$\mathbf{E}[\tilde{r}_p] = r \Rightarrow \alpha = \frac{r - 10}{6}$$

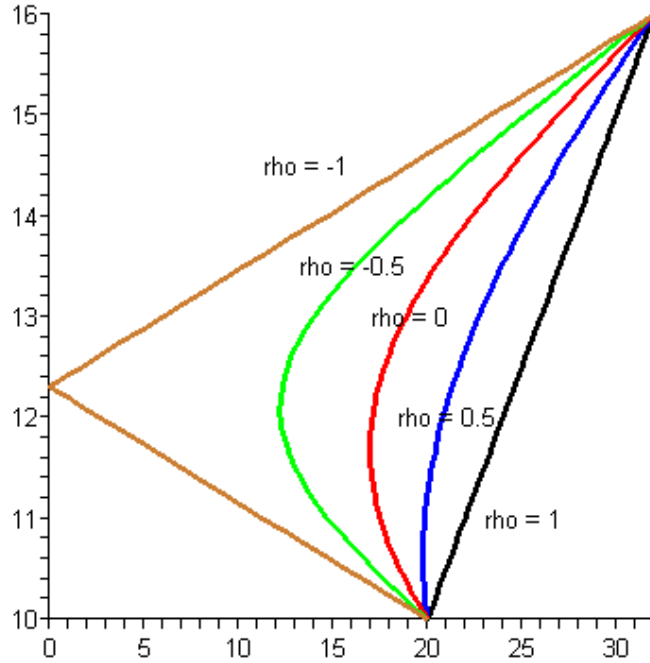


FIG. 5 – Les couples variance - rendement que l'on peut obtenir en diversifiant sectoriellement le portefeuille.

et donc la variance peut-être réécrite en fonction de  $r$  :

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= 1280 \left( \frac{r-10}{6} \right) \left( \frac{4-r}{6} \right) \rho + 1024 \left( \frac{r-10}{6} \right)^2 + 400 \left( \frac{4-r}{6} \right)^2 \\ &= \rho(497.78r - 35.556r^2 - 1422.2) + 39.556r^2 - 657.78r + 3022.2\end{aligned}$$

Aussi en faisant varier  $r$  de 10 à 16, et en alternant les secteurs appariés aux big values du secteur  $a$ , on obtient les différentes courbes de la figure 5. Sans modifier donc le nombre des actifs composant le portefeuille, on voit donc qu'en jouant sur la corrélation (par une diversification sectorielle dans l'exemple), on peut grandement modifier les arbitrages entre le rendement et le risque :

- Ainsi si  $\rho = 1$  la relation entre ces deux variables sont nécessairement monotones : on ne peut alors augmenter le rendement lqu'en augmentant le risque.
- Par contre, dans le cas polaire opposé,  $\rho = -1$ , on voit que partant de  $\alpha = 0$  (et donc du point (400, 10)) il est possible dans un premier temps d'augmenter le rendement tout en diminuant le risque. En effet, dans un portefeuille ne comprenant

initialement que des big values on substitue progressivement des small values plus rentables mais corrélées négativement. Par conséquent, les small values permettent de mieux couvrir le portefeuille et donc diminue sa volatilité. Lorsque  $\alpha = 5/13$ , le portefeuille est complètement assuré :

$$\alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \sigma_p^2 = 0, \bar{r}_p = 12.30\%$$

Si l'on continue à augmenter la part des small values, le portefeuille devient à nouveau risqué, et la relation entre rendement moyen et variance redevient positive. Lorsque  $\alpha = 1$ , le portefeuille ne comprend que des small values (du secteur E) et son couple variance - rendement est donc celui de cet actif.

La démonstration de l'importance des corrélations pour la gestion du risque est la contribution fondamentale de MARKOWITZ. Elle conduit à rechercher la frontière des *portefeuilles efficaces*, i.e. les portefeuilles qui maximisent les rendements à risque donné.

## 5 La frontière des portefeuilles efficaces

En recourant aux deux mécanismes de diversification, et en faisant varier le rendement espéré du portefeuille, on détermine successivement les portefeuilles efficaces du marché, chacun celui étant résumé par les rendements espérés et la matrice de covariance.

Comme la variance du portefeuille s'écrit :

$$\sigma_p^2 = \sum_{a=1}^A \sum_{b=1}^A x_a x_b \sigma_{ab}$$

le problème de sélection est donc :

$$P(\bar{R}) : \begin{cases} \min_{x_1, \dots, x_A} \frac{1}{2} \sum_{a=1}^A \sum_{b=1}^A x_a x_b \sigma_{ab} \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_{a=1}^A x_a \bar{R}_a \geq \bar{R} \\ \sum_{a=1}^A x_a = 1 \end{cases} \quad (19)$$

**Remarque 1** La constante 1/2 de la fonction objectif est introduite uniquement pour ne pas avoir dans les dérivations de  $\sigma_p^2$  qui suivent à prendre en compte une constante numérique. Diviser par 2 la variance ne modifie pas la solution optimale.

Comme on minimise une fonction convexe sous des contraintes linéaires, le problème est donc un problème classique d'optimisation sous contrainte. Si l'on note  $L$  le lagrangien

associé à ce problème, ce dernier peut être écrit sans perte de généralité :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^A \sum_{b=1}^A x_a x_b \sigma_{ab} + \lambda \left( \bar{R} - \sum_{a=1}^A x_a \bar{R}_a \right) + \mu \left( \sum_{a=1}^A x_a - 1 \right)$$

où  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$ .

Comme pour chaque actif  $a$  considéré, la variance :

$$\sigma_p^2 = \sum_{a'=1}^A \sum_{b=1}^A x_{a'} x_b \sigma_{a'b}$$

peut se décomposer de la manière suivante :

$$\sigma_p^2 = x_a^2 \sigma_a^2 + \left( \sum_{b \neq a} x_a x_b \sigma_{ab} \right) + \left( \sum_{a' \neq a} x_{a'} x_a \sigma_{a'a} \right) + \left( \sum_{a' \neq a} \sum_{b \neq a} x_{a'} x_b \sigma_{a'b} \right)$$

la dérivation de la variance du portefeuille donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_a} \sigma_p^2 &= \frac{\partial}{\partial x_a} (x_a^2 \sigma_a^2) + \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \sum_{b \neq a} x_a x_b \sigma_{ab} \right) + \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \sum_{a' \neq a} x_{a'} x_a \sigma_{a'a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \sum_{a' \neq a} \sum_{b \neq a} x_{a'} x_b \sigma_{a'b} \right) \\ &= (2x_a \sigma_a^2) + \left( \sum_{b \neq a} x_b \sigma_{ab} \right) + \left( \sum_{a' \neq a} x_{a'} \sigma_{a'a} \right) + 0 \\ &= 2x_a \sigma_a^2 + 2 \sum_{b \neq a} x_b \sigma_{ab} \\ &= 2 \sum_b x_b \sigma_{ab} \end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre (cpo) suffisante de ce problème sont donc :

$$\sum_{b=1}^A x_b \sigma_{ab} - \lambda \bar{R}_a + \mu = 0, \quad a = 1, \dots, A \quad (20)$$

ou encore :

$$\lambda \bar{R}_a - \sum_{b=1}^A x_b \sigma_{ab} = \mu, \quad a = 1, \dots, A$$

La propriété de linéarité de covariance :

$$\begin{aligned} cov(\tilde{R}_a, \sum_b x_b \tilde{R}_b) &= \sum_b x_b cov(\tilde{R}_a, \tilde{R}_b) \\ &= \sum_b x_b \sigma_{ab} \end{aligned}$$

Evidemment comme  $\sum_{b=1}^A x_b \tilde{R}_b$  est le rendement du portefeuille :

$$\tilde{R}_p = \sum_{b=1}^A x_b \tilde{R}_b$$

on a donc :

$$\sum_{b=1}^A x_b \sigma_{ab} = cov(\tilde{R}_a, \tilde{R}_p)$$

Par conséquent la condition marginale peut se réécrire pour chaque actif  $A$  :

$$\lambda \bar{R}_a = \mu + cov(\tilde{R}_a, \tilde{R}_p), \quad a = 1, \dots, A \quad (21)$$

## 5.1 Interprétation

Economiquement l'interprétation de cette condition est la suivante.  $\lambda$  est la valeur accordée à la rentabilité (moyenne) relativement à celui de minimisation de risque. Comme  $\mu$  est le multiplicateur associé à la contrainte budgétaire, il mesure le coût marginal du financement : en effet, pour respecter la contrainte budgétaire, tout achat supplémentaire de titres implique la liquidation d'autres placements risqués, et donc le renoncement à leurs rendements. Mathématiquement,  $\mu$  résume la valeur de ces revenus, et donc constitue une mesure du coût d'opportunité. La troisième composante de la relation (21), la covariance, mesure le coût marginal de la prise de risque induite par un achat marginal de l'actif  $a$ . Le risque pertinent pour l'agent est celui de son portefeuille et non le risque isolé de l'actif qu'il envisage d'acheter. Aussi seul lui importe l'impact de l'achat marginal de l'actif  $a$  sur la variance  $\sigma_p^2$  du portefeuille. Or, comme les calculs l'ont démontré :

$$\frac{d\sigma_p^2}{dx_a} = 2cov(\tilde{R}_a, \tilde{R}_p) \quad (22)$$

L'achat marginal de l'actif  $a$  n'augmentera le risque du portefeuille que si le rendement est en moyenne corrélé positivement à celui du portefeuille. Trois propriétés essentielles de la théorie du portefeuille de Markowitz peuvent alors être déduites.

### 5.1.1 Diversification et assurance

Si tous les actifs avaient des rendements identiques et indépendants :

$$\bar{R}_a = \bar{R} \quad \forall a$$

$$\sigma_{ab} = 0$$

$$\sigma_a^2 = \sigma^2 \forall a$$

alors la condition marginale (21) se réécrit :

$$\lambda \bar{R} = \mu + x_a^2 \sigma^2, \quad a = 0, \dots, A \quad (23)$$

puisque :

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{R}_a, \tilde{R}_p) &= \sum_b x_b \sigma_{ab} \\ &= x_a \sigma_a^2 + \sum_{b \neq a} x_b \sigma_{ab} \\ &= x_a^2 \sigma^2 + 0 \\ &= x_a^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque actif  $a$ , la condition marginale est identique (définie par les mêmes variables  $\lambda \bar{R}$ ,  $\mu$  et  $\sigma^2$ ) et donc la solution l'est aussi :

$$x_a = x_b \quad \forall a, b$$

Or la somme des parts étant égales à 1, nécessairement on doit donc avoir :

$$x_a = \frac{1}{A} \quad \forall a = 1, \dots, A$$

Le portefeuille que l'on doit donc détenir dans ce cas est un portefeuille parfaitement diversifié. La variance de celui-ci est alors la somme de  $A$  termes dont chacun est le carré de la part de l'actif  $((1/A)^2)$  multiplié par sa variance ( $\sigma^2$ ) :

$$\sigma_p^2 = A \times \left[ \frac{1}{A^2} \sigma^2 \right] = \frac{1}{A} \sigma^2$$

Plus donc le nombre des actifs disponibles pour la diversification est grand, plus la variance (et donc la volatilité du portefeuille) sera grande. Asymptotiquement même, on obtient le résultat de l'assurance complète puisque :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sigma_p^2 = 0 \quad (24)$$

On retrouve évidemment alors le résultat que la mutualisation d'un très grand nombre de risques indépendants permet de faire disparaître quasi-sûrement le risque.

### 5.1.2 Innovation et risque

Un autre résultat important est de souligner que pour un actif que l'on introduit sur le marché ou dans le portefeuille d'un agent, son risque propre est à la marge sans importance. En effet si l'on considère un tel actif, alors comme initialement sa part est :

$$x_a = 0 \tag{25}$$

sa covariance ne dépend que de ses covariances avec les autres actifs :

$$\begin{aligned} cov(\tilde{R}_a, \tilde{R}_p) &= \sum_{b \neq a} x_b \sigma_{ba} + x_a \sigma_a^2 \\ &= \sum_{b \neq a} x_b \sigma_{ba} \end{aligned}$$

Par conséquent, même si son risque propre est considérable, elle n'entraîne initialement aucun coût. La décision de faire entrer un tel actif dans le portefeuille est donc indépendante du risque propre, de sa variance  $\sigma_a^2$ .

## 5.2 La frontière efficiente des portefeuilles

L'analyse des conditions de premier ordre permet de caractériser les choix optimaux de portefeuille et d'obtenir l'équation reliant la variance au rendement espéré des portefeuilles efficaces, i.e. l'équation de la frontière des portefeuilles efficaces. La démonstration qui suit est essentiellement due à MERTON [1972] [Mer72].

La condition de premier ordre (relation (20)) pour chaque actif  $a$  :

$$\sum_{b=1}^A x_b \sigma_{ab} = \lambda \bar{R}_a - \mu$$

Le terme de gauche peut s'écrire comme le produit vectoriel de la ligne  $a$  de la matrice de covariance avec le vecteur  $\mathbf{x}$  :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(a)} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sigma_{a1} & \dots & \sigma_{ab} & \dots & \sigma_{aA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_b \\ \dots \\ x_A \end{bmatrix} = \sum_{b=1}^A x_b \sigma_{ab}$$

Le système formé par les différentes conditions de premier ordre peut donc se réécrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \mathbf{x} = \lambda \bar{R}_1 - \mu \\ \dots \\ \boldsymbol{\sigma}_{(a)} \cdot \mathbf{x} = \lambda \bar{R}_a - \mu \\ \dots \\ \boldsymbol{\sigma}_{(A)} \cdot \mathbf{x} = \lambda \bar{R}_A - \mu \end{array} \right. \quad (26)$$

Ces conditions peuvent se réécrire :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{(1)} \\ \dots \\ \boldsymbol{\sigma}_{(a)} \\ \dots \\ \boldsymbol{\sigma}_{(A)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \dots \\ \bar{R}_a \\ \dots \\ \bar{R}_A \end{bmatrix} - \mu \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Le vecteur colonne que multiplie  $\mathbf{x}$  est évidemment la matrice des covariances. Le terme qui est facteur de  $\lambda$  est le vecteur-colonne des rendements  $\mathbf{R}$ . Aussi le système des conditions de premier ordre définissant le portefeuille optimal est :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{R} - \mu \cdot \mathbf{1} \quad (28)$$

où  $\mathbf{1}$  est le vecteur colonne (à  $A$  lignes) dont toutes les composantes sont égales à 1. Comme  $\boldsymbol{\sigma}$  a été supposée de plein rang, cette matrice est inversible et donc le portefeuille efficient  $\mathbf{x}$  est défini par :

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\lambda \cdot \mathbf{R} - \mu \cdot \mathbf{1}) \quad (29)$$

ou encore par :

$$\mathbf{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - \mu \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} \quad (30)$$

Comme  $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$  est une matrice à  $A$  lignes,  $A$  colonnes,  $\mathbf{R}$  est un vecteur colonne à  $A$  lignes, alors  $\boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R}$  est un vecteur ligne de  $A$  lignes. De même  $\boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1}$  est un vecteur colonne à  $A$  lignes pour les mêmes raisons. Enfin  $\boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1}$  sont fixés par les conditions du marché, plus précisément par les matrices de covariance et par les rendements. Le portefeuille optimal  $\mathbf{x}$  est donc une combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

Les paramètres de cette combinaison linéaire,  $\lambda$  et  $\mu$ , sont deux variables endogènes (comme  $\mathbf{x}$ ) du programme  $P_{\min}(\hat{R})$ . Leurs valeurs dépendent donc du rendement  $\hat{R}$  exigé.

Pour les déterminer, on utilise les deux contraintes encore non utilisées du programme.  
La contrainte budgétaire :

$$\mathbf{1}^T \cdot \mathbf{x} = 1$$

nous donne après à  $\mathbf{x}$  de sa valeur :

$$\lambda \cdot \mathbf{1}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - \mu \cdot \mathbf{1}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} = 1 \quad (31)$$

$\mathbf{1}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R}$  est le produit du vecteur ligne  $\mathbf{1}^T$  par le vecteur colonne  $\boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R}$ . Il est donc un nombre réel. De même  $\mathbf{1}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1}$ , qui est le produit du vecteur ligne  $\mathbf{1}^T$  par le vecteur colonne  $\boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1}$ , est aussi un réel.

La contrainte de rendement :

$$\mathbf{R}^T \mathbf{x} = \widehat{R}$$

s'écrit, après substitution à  $\mathbf{x}$  de son expression, s'écrit :

$$\lambda \cdot \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - \mu \cdot \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} = \widehat{R}$$

Là aussi  $\mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1}$  sont deux réels. Le système déterminant la valeur des deux multiplicateurs est donc :

$$\begin{cases} \lambda \cdot \mathbf{1}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - \mu \cdot \mathbf{1}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} = 1 \\ \lambda \cdot \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - \mu \cdot \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} = \widehat{R} \end{cases} \quad (32)$$

En notant :

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} \\ B &= \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \mathbf{R} \\ C &= \mathbf{1}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} \end{aligned}$$

les équations précédentes se réécrivent :

$$\begin{cases} A \cdot \lambda - C \mu = 1 \\ B \cdot \lambda - A \cdot \mu = \widehat{R} \end{cases} \quad (33)$$

Les solutions du système sont :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{A - C \widehat{R}}{A^2 - B \cdot C} = \frac{C \cdot \widehat{R} - A}{D} \\ \mu &= \frac{A \cdot \widehat{R} - B}{A^2 - B \cdot C} = \frac{B - A \widehat{R}}{D} \end{aligned}$$

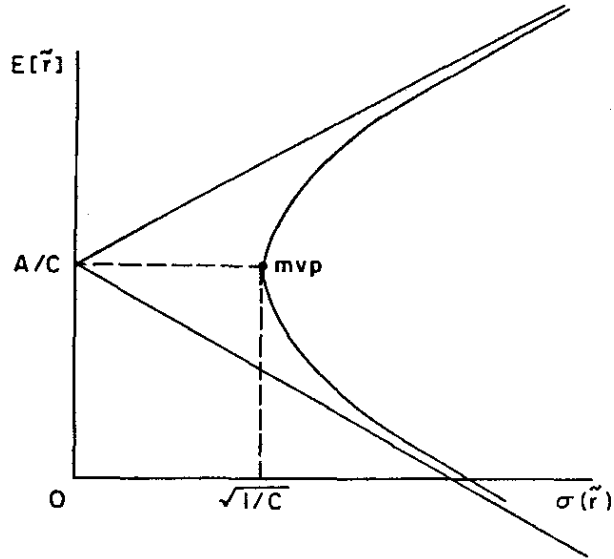


FIG. 6 – La frontière des portefeuilles efficaces dans l’espace écart type / espérance des rendements

où  $D = BC - A^2 > 0$ .<sup>6</sup>

La connaissance des multiplicateurs permet d’obtenir immédiatement l’équation de la frontière des portefeuilles efficaces. En effet, à l’aide de la condition de premier ordre :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{R} + \mu \cdot \mathbf{1}$$

la variance du portefeuille optimal se réécrit immédiatement :

$$\begin{aligned} \sigma_{opt}^2 &= \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^\top (\lambda \cdot \mathbf{R} + \mu \cdot \mathbf{1}) \\ &= \lambda \cdot \widehat{R} + \mu \end{aligned}$$

La substitution à  $\lambda$  et  $\mu$  de leurs valeurs donnent alors l’équation de la frontière :

$$\begin{aligned} \sigma_{opt}^2 &= \frac{(C\widehat{R} - A)\widehat{R} + B - A\widehat{R}}{D} \\ &= \frac{C\widehat{R}^2 - 2A\widehat{R} + B}{D} \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Pour déterminer le signe de  $D$ , on étudie la forme quadratique  $(\mathbf{A}\mathbf{R}^T - B \cdot \mathbf{1}^T)\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{R} - B \cdot \mathbf{1})$ . Celle-ci est positive puisque  $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$  est définie positive et elle peut s’écrire :  $B^2C - A^2B = B(BC - A^2) = B \cdot D$ . Comme  $B \cdot D > 0$  et que  $B > 0$ ,  $D > 0$ .

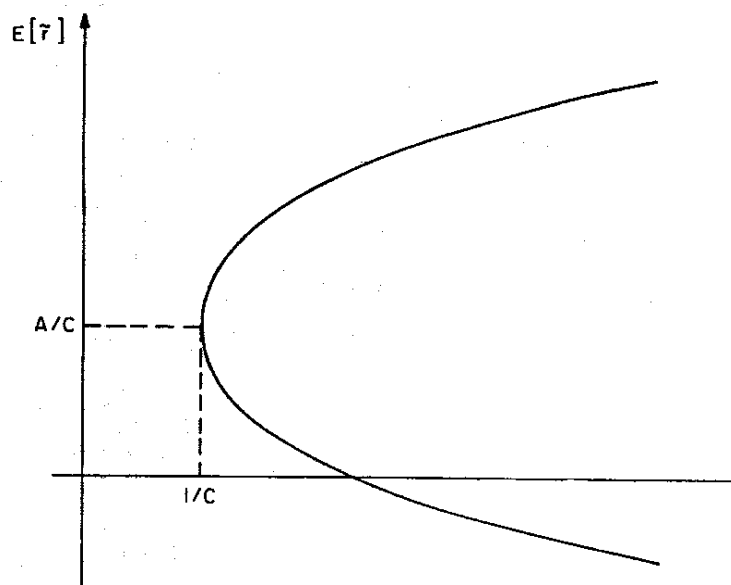


FIG. 7 – La frontière des portefeuilles efficaces dans l’espace variance / espérance des rendements

Comme le montrent les figures 6 et 7, l’équation de la frontière des portefeuilles efficaces est une parabole dont la base est le portefeuille de variance minimale.

**Proposition 1** *En l’absence d’un actif sans risque, la frontière d’efficacité est la partie ‘supérieure’ d’une parabole dont l’équation est :*

$$\sigma^2 = \frac{C\hat{R}^2 - 2A\hat{R} + B}{D}$$

La propriété essentielle de celle-ci est d’être une parabole dans l’espace (variance, rendement espéré) comme le montre la figure 8. Les propriétés financières implicites à cette géométrie de la frontière sont les suivantes :

- il existe un portefeuille efficace qui minimise le risque ; celui-ci est appelé *portefeuille de variance minimale*;<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Pour déterminer ce portefeuille, il suffit de dériver la variance par rapport à  $\hat{R}$  :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{R}} \sigma^2 = \frac{2C\hat{R} - 2A}{D}$$

et de déterminer la valeur pour laquelle cette dérivée s’annule :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{R}} \sigma^2 = 0 \Rightarrow \hat{R} = \frac{A}{C}$$

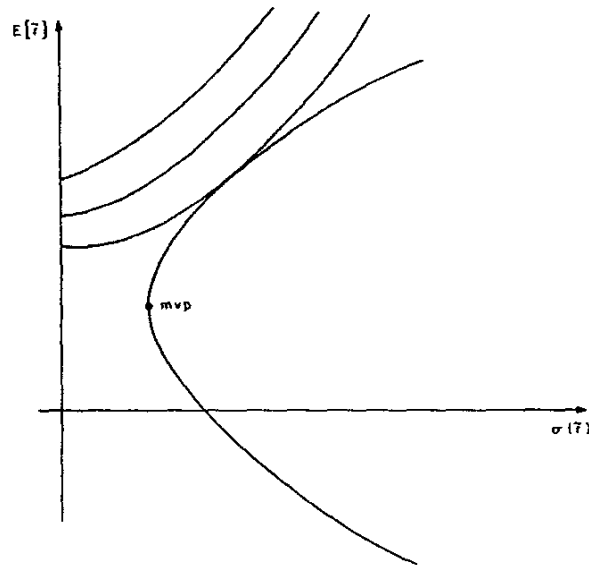


FIG. 8 – La détermination du portefeuille optimale sur la frontière des portefeuilles efficaces

- la croissance de la (partie supérieure de la) frontière implique que l'on peut augmenter le rendement espéré des portefeuilles (efficaces) mais au prix d'un risque croissant - aussi lorsque l'on doit évaluer *ex post* la performance d'un titre, d'un portefeuille ou d'un gérant, il est nécessaire de prendre en compte les risques encourus, de *corriger le rendement espéré du risque* ;
- la concavité de la courbe implique que l'augmentation de la variance a de moins en moins d'effet favorable - la morale de cette concavité est donc celle tirée par Fischer Black : "Pour obtenir des gains attendus plus élevés, vous devez prendre davantage de risque. Si vous voulez escalader une haute montagne, vous devez être préparé à souffrir." ([Bla88], cité par [Ber95] p.210).

## 6 La gestion indicielle comme gestion optimale

Tobin [Tob58] puis Sharpe [Sha64] ont étendu la théorie du portefeuille de Markowitz de deux manières en ajoutant un actif sans risque. Cette modification apparemment anodine a comme conséquence de faire apparaître comme optimale la gestion passive. Le résultat démontrant cela est le théorème des deux fonds. On présente tout d'abord ce

résultat dans un cadre ne comprenant que deux actifs risqués avant de l'étendre à un cadre en comportant un nombre arbitraire.

On suppose donc qu'il existe trois actifs seulement : l'actif sans risque (actif 0), deux actifs risqués (actifs 1 et 2). Se construire un portefeuille est donc choisir  $x_0, x_1, x_2$  vérifiant :

$$x_0 + x_1 + x_2 = 1$$

Une autre manière de présenter ces choix de portefeuille consiste à se les représenter en deux étapes :

- on détermine d'abord la part  $x_0$  de la richesse que l'on désire investir en actif sans risque ;
- puis on détermine la distribution de la richesse restante  $(1 - x_0)$  entre les deux actifs risqués, autrement dit on détermine le portefeuille d'actifs risqués  $(z, 1 - z)$  que l'on désire se construire.

Evidemment, les  $x$  et les  $z$  sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$x_1 = (1 - x_0)z$$

$$x_2 = (1 - x_0)(1 - z)$$

Ainsi, si un agent investit 60% de sa richesse en actifs sans risque, et se construit un portefeuille risqué comprenant 20% de l'actif 1, 80% de l'actif 2, on a  $z = 0.2$ .

Le problème de portefeuille à résoudre est alors toujours :

$$P_0(\widehat{R}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x_0, z} \frac{1}{2} \sigma_p^2 \\ \text{sous la contrainte :} \\ \mathbf{E} [\widetilde{R}_p] \geq \widehat{R} \\ x_0 + x_1 + x_2 = 1 \end{array} \right. \quad (34)$$

où  $\sigma_p^2$  est la variance du portefeuille,  $\mathbf{E} [\widetilde{R}_p]$  son espérance. Provisoirement, on continue à utiliser les  $x_1, x_2$ , comme instruments :

$$\mathbf{E} [\widetilde{R}_p] = x_0 R_0 + x_1 \widehat{R}_1 + x_2 \widehat{R}_2$$

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12} + x_2^2 \sigma_2^2$$

Le lagrangien associé à ce problème est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} + x_2^2\sigma_2^2] \\ & -\lambda \left( x_0R_0 + x_1\bar{R}_1 + x_2\bar{R}_2 - \widehat{R} \right) + \mu(x_0 + x_1 + x_2 - 1) \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur associé à la contrainte de rendement,  $\mu$  celui associé à la contrainte budgétaire. Les conditions de premier sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} (cpo\ x_0) \quad \lambda R_0 = \mu \\ (cpo\ x_1) \quad \lambda \bar{R}_1 = \mu + cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_p) \\ (cpo\ x_2) \quad \lambda \bar{R}_2 = \mu + cov(\tilde{R}_2, \tilde{R}_p) \end{array} \right.$$

L'introduction de l'actif sans risque a évidemment comme effet de fixer le coût d'opportunité  $\mu$  du financement à  $\lambda R_0$  quelle que soit la composition du portefeuille. En effet, pour financer les achats, on n'est plus obligé de vendre les actifs financiers initialement détenus. On peut aller plus simplement sur le marché monétaire pour emprunter au taux  $R_0 - 1$ . Cet ancrage du coût du financement  $\mu$  permet de réécrire les conditions de premier ordre des deux autres actifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(\bar{R}_1 - R_0) = cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_p) \\ \lambda(\bar{R}_2 - R_0) = cov(\tilde{R}_2, \tilde{R}_p) \end{array} \right. \quad (35)$$

Le rendement excédentaire de chaque actif risqué ( $\bar{R}_a - R_0$ ) apparaît donc proportionnel au risque supplémentaire qu'il induit ( $cov(\tilde{R}_a, \tilde{R}_p)$ ). Pour éliminer le terme  $\lambda$ , on peut faire le rapport de ces équations. On obtient alors :

$$\frac{cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_p)}{cov(\tilde{R}_2, \tilde{R}_p)} = \frac{\bar{R}_1 - R_0}{\bar{R}_2 - R_0} \quad (36)$$

ou en explicitant les covariances :

$$\frac{x_1\sigma_1^2 + x_2\sigma_{12}}{x_1\sigma_{12} + x_2\sigma_2^2} = \frac{\bar{R}_1 - R_0}{\bar{R}_2 - R_0}$$

Mathématiquement, cette équation a pour propriété d'être homogène de degré 0 puisque si  $(x_1, x_2)$  vérifie cette équation alors  $(\lambda x_1, \lambda x_2)$  la vérifie aussi :

$$\frac{x_1\sigma_1^2 + x_2\sigma_{12}}{x_1\sigma_{12} + x_2\sigma_2^2} = \frac{\bar{R}_1 - R_0}{\bar{R}_2 - R_0} \Rightarrow \frac{\lambda x_1\sigma_1^2 + \lambda x_2\sigma_{12}}{\lambda x_1\sigma_{12} + \lambda x_2\sigma_2^2} = \frac{\bar{R}_1 - R_0}{\bar{R}_2 - R_0}$$

Cette homogénéité a une conséquence financière fondamentale. Pour la voir, il suffit de réutiliser les expressions (déduites plus haut) de  $x_1$  et  $x_2$  :

$$x_1 = (1 - x_0)z$$

$$x_2 = (1 - x_0)(1 - z)$$

L'équation se réécrit en la suivante :

$$\frac{(1 - x_0)z\sigma_1^2 + (1 - x_0)(1 - z)\sigma_{12}}{(1 - x_0)z\sigma_{12} + (1 - x_0)(1 - z)\sigma^2} = \frac{\bar{R}_1 - R_0}{\bar{R}_2 - R_0} \quad (37)$$

et donc après élimination de  $(1 - x_0)$  on obtient donc une équation à une seule inconnue ( $z$ ) :

$$\frac{z\sigma_1^2 + (1 - z)\sigma_{12}}{z\sigma_{12} + (1 - z)\sigma^2} = \frac{\bar{R}_1 - R_0}{\bar{R}_2 - R_0} \quad (38)$$

Cette équation a pour seules paramètres ceux du marché (rendements moyens et covariance). Elle est surtout totalement indépendante du rendement exigé ( $\widehat{R}$ ) et des autres paramètres personnelles : *quel que donc soit le rendement exigé, l'agent concerné, la solution de cette équation est la même !* Tous les agents, à l'équilibre du marché, sont donc conduits à sélectionner le même portefeuille risqué. Leurs paramètres personnels (goût pour le risque, richesse, etc.) ne vont jouer que pour le dernier paramètre définissant le portefeuille :  $x_0$ , i.e. le partage entre le portefeuille risqué et l'actif sans risque. Ceci constitue le *théorème des deux fonds*.

Lorsqu'il existe un nombre quelconque d'actifs, la contrainte budgétaire s'écrit :

$$x_0 + \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \quad (39)$$

avec les vecteurs définis plus haut. La contrainte sur le rendement excédentaire est donc :

$$(\mathbf{R} - R_0 \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} \geq \widehat{R} - R_0 \quad (40)$$

Le programme équivalent à (34) s'écrit :

$$P(\widehat{R}) : \begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x} \\ \text{sous la contrainte :} \\ (\mathbf{R} - R_0 \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} \geq \widehat{R} - R_0 \end{cases} \quad (41)$$

où la position nécessaire sur le marché de l'actif certain pour équilibrer la contrainte budgétaire :

$$x_0 = 1 - \mathbf{1}^T \mathbf{x} \quad (42)$$

Ce programme ne diffère que marginalement du programme de portefeuille à la Markowitz. Son lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x} + \lambda (\widehat{R} - R_0 - (\mathbf{R} - R_0 \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x})$$

si l'on note  $\lambda$  le multiplicateur associé à la contrainte de rendement excédentaire. Le réarrangement des conditions de premier ordre nous donne :

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{x} = \lambda (\mathbf{R} - R_0 \mathbf{1}) \quad (43)$$

par des raisonnements similaires à ceux qui ont conduit aux conditions équivalentes pour la théorie du portefeuille à la Markowitz. Le portefeuille optimal est donc défini par la relation :

$$\mathbf{x} = \lambda (\boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - R_0 \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1}) \quad (44)$$

Le portefeuille risqué n'est pas nécessairement un portefeuille complètement investi, i.e. vérifiant à lui seul la contrainte budgétaire. Le plus souvent en effet, comme on peut épargner ou s'endetter dans l'actif sans risque, on a :

$$\mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 - x_0 \neq 1 \quad (45)$$

Cependant, on peut définir à partir de  $\mathbf{x}$  un portefeuille risqué complètement investi. En effet, si l'on définit le vecteur colonne  $\mathbf{z}$  par :

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^T \mathbf{x}} \quad (46)$$

alors celui-ci vérifie :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T \cdot \mathbf{z} &= \mathbf{1}^T \cdot \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^T \mathbf{x}} \\ &= \frac{\mathbf{1}^T \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{1}^T \mathbf{x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Financièrement, le vecteur colonne  $\mathbf{z}$  correspond à un portefeuille risqué complètement investi, satisfaisant la contrainte budgétaire. Ce portefeuille risqué complètement investi défini à partir du choix optimal  $\mathbf{x}$  a cependant deux propriétés remarquables :

- sa composition est indépendante du rendement exigé puisque

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^T \mathbf{x}} \\ &= \frac{\lambda (\boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - R_0 \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1})}{\lambda \mathbf{1}^T (\boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - R_0 \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1})} \\ &= \frac{\boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - R_0 \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T (\boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - R_0 \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1})} \end{aligned}$$

- en fait, plus remarquablement, il ne dépend que des données du marché (rendements excédentaires espérés et matrice de covariance) et donc est indépendant de toute caractéristique individuelle; même si les choix optimaux  $\mathbf{x}$  des individus diffèrent en fonction par exemple de leurs préférences, de leurs aversions pour le risque, de leurs richesses, ceux-ci définissent le même  $\mathbf{z}$ !

Si on inverse la définition de  $\mathbf{z}$  (relation (46)) pour exprimer  $\mathbf{x}$  en fonction du portefeuille  $\mathbf{z}$  commun :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{1}^T \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \\ &= (1 - x_0) \cdot \mathbf{z}\end{aligned}$$

le portefeuille optimal pour chaque agent apparaît comme résultat d'un processus en deux étapes :

- à la première on détermine la part  $x_0$  consacrée à l'investissement dans l'actif certain et à la part  $(1 - x_0)$  consacrée à l'investissement risqué;
- à la seconde on se constitue le portefeuille risqué commun  $\mathbf{z}$  pour une quantité égale à  $(1 - x_0)$ .

Curieusement, les paramètres spécifiques de chaque agent (goût du risque, richesse) détermine seulement la première étape mais non la composition du portefeuille risqué. Evidemment ceci a comme conséquence que le portefeuille au lieu d'être constitué artisanalement par chaque investisseur sur le marché, par l'achat des différents titres qui le constituent et dans les proportions désirées, va pouvoir être simplement obtenu "industriellement". Le portefeuille  $\mathbf{z}$  détermine implicitement un indice du marché - indice dont la composition est évidemment celle de  $\mathbf{z}$ . Par conséquent, si certains fonds indiciels reproduisent cet indice, en se constituant un actif répliquant  $\mathbf{z}$ , il suffira pour les investisseurs d'acheter des parts dans ces fonds pour reproduire immédiatement le portefeuille  $\mathbf{z}$ . La meilleure gestion d'après le théorème obtenu est donc une gestion passive, plus précisément la gestion indicielle!

Une autre conséquence théorique du théorème des deux fonds est de définir très précisément les couples rendements - risques que l'on va atteindre par des stratégies optimales. Comme, en effet, l'écart-type du portefeuille est  $\sigma_p = (1 - x_0)\sigma_p^r$ , où  $\sigma_p^r$  est la variance du portefeuille risqué, et que l'excès de rendement (par rapport à l'actif certain) est  $\bar{R}_p - R_0 = (1 - x_0)(\bar{R}_p^r - R_0)$ , où  $\bar{R}_p^r$  est le rendement espéré du portefeuille risqué, alors

ce dernier croît linéairement avec l'écart-type :

$$\overline{R}_p - R_0 = \left( \frac{\overline{R}_p^r - R_0}{\sigma_p^r} \right) \sigma_p \quad (47)$$

La droite ainsi définie constitue la *droite de marché* ; nécessairement pour être un ensemble de choix optimaux, elle doit être tangente à la frontière des portefeuilles efficients comme l'illustre la figure ???. Selon que le gérant de portefeuille est prudent ou risquophile son point d'équilibre sera sur la droite de marché plus ou moins proche du point  $R_0$  comme l'illustrent les points  $P$  et  $R$ , points atteints par des pondérations différentes de l'actif sans risque dans le portefeuille. Mais si la théorie du portefeuille est correcte, tous les portefeuilles doivent être sur cette droite et donc combiner dans le même rapport le rendement excédentaire du portefeuille et son risque. A l'équilibre par conséquent tous les portefeuilles  $(\sigma_p, \overline{R}_p)$  détenus vérifient :

$$\frac{\overline{R}_p - R_0}{\sigma_p} = S \quad (48)$$

où  $S$  est le ratio de Sharpe du portefeuille risqué commun :

$$S = \frac{\overline{R}_p^r - R_0}{\sigma_p^r} \quad (49)$$

Comme la ratio de Sharpe  $S$  divise le rendement excédentaire par le risque, il constitue une mesure simple du rendement excédentaire moyen corrigé du risque et constitue donc une mesure de performance corrigée du risque. En effet, entre deux portefeuilles dont les rendements excédentaires moyens sont identiques, il donnera une performance plus importante à celui dont la volatilité sera la plus faible. Le théorème des deux fonds implique que si les participants au marché prennent tous des décisions optimales alors leurs mesures de performance **corrigées du risque** seront identiques. A l'équilibre, il est impossible donc de "battre le marché", de faire mieux que ne le permettrait la détention d'une combinaison de l'actif sans risque et de l'indice synthétisant le portefeuille risqué du théorème des deux fonds. Avec les résultats empiriques de la littérature sur l'efficacité sur les marchés, ce résultat du théorème des deux fonds a été l'une des justifications avancées en faveur de la gestion indicielle.

## 7 Annexe : justifications de l'espérance variance

Cette hypothèse sur les préférences est vérifiée pour certaines restrictions couramment utilisées en finance et en économie. Nous en présentons ici trois exemples.

## 7.1 L'utilité élémentaire quadratique

Lorsque la fonction d'utilité élémentaire est quadratique, i.e. par exemple de la forme  $w - k.w^2$ , cette hypothèse est évidemment toujours vérifiée quelle que soit la distribution suivie par la richesse. En effet, on a alors :

$$U = \mathbf{E} [u(\tilde{w})] = \mathbf{E} [\tilde{w} - k\tilde{w}^2] = \mathbf{E} [\tilde{w}] - k. (\mathbf{E} [\tilde{w}]^2 + \sigma_w^2)$$

où :  $\mathbf{E} [.]$  est l'opérateur espérance,  $\sigma_w^2$  la variance de la richesse. Cette première spécification, utilisée notamment par Markowitz, a comme limite principale de contredire certaines observations :

- l'utilité n'y est tout d'abord pas une fonction strictement croissante de la consommation et donc les dispositions à payer (*Tms*) deviennent nécessairement négatives au delà d'un certain seuil ;
- avec une telle fonction, l'actif certain (la monnaie) est un bien supérieur et sa part dans le portefeuille est croissante du revenu. Ceci est évidemment en contradiction avec l'expérience historique.

Une autre manière de justifier l'espérance - variance est de supposer que les rendements sont des variables aléatoires dont la distribution suit la loi normale (ou log-normale). Comme le suggère les figures 1 et 2, cette hypothèse gaussienne peut être acceptée en première approximation.<sup>8</sup> Le critère espérance / variance est en effet également le bon critère lorsque les variables aléatoires sont distribuées suivant la loi normale et que les préférences se caractérisent par une aversion absolue à l'égard du risque constante.

## 7.2 Aversion absolue constante et normalité de la distribution

Lorsque le coefficient d'aversion absolue est constant, la fonction d'utilité élémentaire est l'exponentielle négative :  $u(\tilde{w}) = -e^{-a\tilde{w}}$ ,  $a$  étant la mesure d'Arrow-Pratt d'aversion absolue à l'égard du risque :

$$u' = ae^{-a\tilde{w}}, u'' = -a^2e^{-a\tilde{w}} \Rightarrow a = -\frac{u''}{u'} = -\frac{-a^2e^{-a\tilde{w}}}{ae^{-a\tilde{w}}}$$

Lorsque la distribution de la richesse  $\tilde{w}$  est normale,  $\mathcal{N}(m, \sigma_w^2)$ , maximiser l'espérance de l'utilité revient à maximiser  $\mathbf{E} [\tilde{w}] - \frac{a}{2}\sigma_w^2$ .

---

<sup>8</sup>En fait, un fait empirique récurrent est que les fréquences des valeurs extrêmes des rendements sont sensiblement supérieures aux fréquences cohérentes permises par des lois normales. Parmi les distributions les plus courantes, la distribution de Student apparaît fréquemment comme la meilleure approximation. Voir APARICIO & ESTRADA [2001] [AE01] .

En effet, si la richesse est une variable aléatoire normale  $\tilde{w}$  d'espérance mathématique  $m$  et d'écart type  $\sigma$ , l'utilité de von Neumann (espérance mathématique de l'utilité élémentaire)  $\mathbf{U}$  ne dépend que de  $m$  et de  $\sigma$  et s'écrit :

$$\mathbf{U} = \mathbf{E}(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu \cdot w} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{w-m}{\sigma}\right)^2} dw$$

Posons  $s = \frac{w-m}{\sigma}$ , on a alors :

$$w = \sigma \cdot s = m, \quad dw = \sigma \cdot ds$$

L'espérance d'utilité peut donc être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu(\sigma s+m)} e^{-\frac{s^2}{2}} \sigma \cdot ds \\ &= \frac{-e^{-\nu m}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (s^2+2\sigma\nu s)} ds \\ &= \frac{-e^{\sigma m}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot [(s+\sigma\nu)^2 - \sigma^2 \cdot \nu^2]} ds \\ &= \frac{-e^{-\nu m + \frac{\nu^2 \sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (s+\sigma\nu)^2} ds \end{aligned}$$

Posons :

$$t = s + \sigma\nu, \quad dt = ds$$

On obtient alors :

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = -e^{-\nu m + \frac{1}{2} \cdot \nu^2 \cdot \sigma^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Le second membre est égal à 1. L'espérance d'utilité est donc reliée à la moyenne et à la variance de la manière suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = -e^{-\nu[m - \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot \sigma^2]}$$

Maximiser l'espérance d'utilité revient donc à maximiser  $m - \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot \sigma^2$ . La courbe d'indifférence  $(m, \sigma^2)$  correspondant au niveau d'espérance d'utilité  $\mathbf{U}$  a donc pour équation :

$$m = \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot \sigma^2 + \frac{\text{Log } \mathbf{U}}{\nu}$$

Cette double condition sur l'utilité élémentaire et sur la distribution de la richesse n'est qu'une condition suffisante. L'espérance / variance est par exemple toujours appropriée si les rendements suivent des lois normales et que les préférences sont représentables par des fonctions vNM dont la fonction d'utilité est définie sur la richesse aléatoire terminale comme l'a démontré INGERSOLL [1987] ([Ing87] pp.96-7).

### 7.3 La normalité des distributions et l'efficience des choix optimaux

Le point démontré par Ingersoll est que si la distribution de la richesse terminale est normale, et donc définie par deux paramètres (moyenne et écart-type) alors nécessairement on peut définir des courbes d'indifférence dans l'espace variance - moyenne, et qu'elles ont la bonne forme (croissante et convexe).

On suppose donc que la moyenne et la variance de la distribution (normale) de  $\widetilde{W}$  sont notées  $\overline{W}$  et  $\sigma^2$ . L'utilité espérée définie donc par ces deux paramètres, notée  $V(\overline{W}, \sigma_W)$ , s'écrit :

$$V(\overline{W}, \sigma_W) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(W) f(W) dW \quad (50)$$

où  $u$  est la fonction d'utilité élémentaire,  $f$  la fonction de densité :

$$f(W) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{W-\overline{W}}{\sigma}\right)^2}$$

$u$  est supposée strictement croissante et strictement concave :

$$u'(W) > 0, \quad u''(W) < 0 \quad (51)$$

Si l'on note  $\varepsilon$ , la variable centrée réduite définie par  $\overline{W}$  et  $\sigma^2$  :

$$\varepsilon = \frac{W - \overline{W}}{\sigma}$$

comme :

$$d\varepsilon = \frac{dW}{\sigma}$$

on peut réécrire (50) de la manière suivante :

$$V(\overline{W}, \sigma_W) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\overline{W} + \varepsilon\sigma) n(\varepsilon) d\varepsilon \quad (52)$$

où  $n$  est la fonction de densité de la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(t, \infty)$  :

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}$$

On manipule alors (52) pour en calculer les dérivées par rapport à  $\overline{W}$  et à  $\sigma$ . Ainsi la dérivée de  $V$  par rapport à la moyenne s'écrit :

$$\begin{aligned} V_1(\overline{W}, \sigma_W) & : = \frac{\partial V(\overline{W}, \sigma_W)}{\partial \overline{W}} \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} u'(\overline{W} + \varepsilon\sigma) n(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned}$$

Comme  $u'(W) > 0$  pour tout  $W$ , la dérivée de l'utilité espérée par rapport à la moyenne est nécessairement strictement positive :

$$V_1(\bar{W}, \sigma_W) > 0 \quad (53)$$

$$\begin{aligned} V_2 & : = \frac{\partial V}{\partial \sigma} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u'(\bar{W} + \varepsilon\sigma) \varepsilon e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \end{aligned}$$

A l'intérieur de l'intégrale, on a le produit de  $u'(\bar{W} + \varepsilon\sigma)$  et de  $\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}$ . Ce dernier terme est égal à la dérivée de  $-e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}$  :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left( -e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \right) = \varepsilon e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}$$

Aussi si l'on recourt à une intégration par partie comme :

$$\int f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f'(x)g(x)dx$$

on aurait donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(\bar{W} + \varepsilon\sigma) \varepsilon e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon = - \left[ u'(\bar{W} + \varepsilon\sigma) e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \right]_{+\infty}^{-\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u''(\bar{W} + \varepsilon\sigma) (-e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}) d\varepsilon$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0$ , le terme entre crochets est nul. Aussi :

$$V_2(\bar{W}, \sigma_W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u''(\bar{W} + \varepsilon\sigma) e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon$$

Comme  $u''(W) < 0 \forall W$  on a donc :

$$V_2(\bar{W}, \sigma_W) < 0 \quad (54)$$

Une fois calculé les dérivés de  $V$  et déterminé que le signe de ces deux dérivés étaient bien défini, on a immédiatement celui du taux de substitution entre l'espérance et la variance :

$$\frac{d\bar{W}}{d\sigma_W |_{V=cste}} = - \frac{V_2(\bar{W}, \sigma_W)}{V_1(\bar{W}, \sigma_W)} > 0 \quad (55)$$

Ceci démontre que dans l'espace écart-type (ou variance) / moyenne, les courbes d'indifférence sont croissantes. On peut également démontré leur convexité. En effet :

$$\begin{aligned} V_{11}(\bar{W}, \sigma_W) & = \frac{\partial^2 V(\bar{W}, \sigma_W)}{\partial \bar{W}^2} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u''(\bar{W} + \varepsilon\sigma) e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \\ & < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{22}(\bar{W}, \sigma_W) &= \frac{\partial^2 V(\bar{W}, \sigma_W)}{\partial \sigma^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u''(\bar{W} + \varepsilon\sigma) \varepsilon^2 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \\
&< 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{12}(\bar{W}, \sigma_W) &= \frac{\partial^2 V(\bar{W}, \sigma_W)}{\partial \bar{W} \partial \sigma^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u''(\bar{W} + \varepsilon\sigma) \varepsilon e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \\
&< 0
\end{aligned}$$

Enfin on montre que le hessien de la fonction  $V$  :

$$V_{11}(\bar{W}, \sigma_W) V_{12}(\bar{W}, \sigma_W) - \left( \frac{\partial^2 V(\bar{W}, \sigma_W)}{\partial \bar{W} \partial \sigma} \right)^2$$

est strictement négatif.

En notant  $H$  la différence, on a en effet que :

$$H = \int u''(\bar{W} + \varepsilon\sigma) \cdot n(\varepsilon) d\varepsilon \int u''(\bar{W} + \varepsilon\sigma) \cdot \varepsilon^2 \cdot n(\varepsilon) d\varepsilon - \left( \int u''(\bar{W} + \varepsilon\sigma) \cdot \varepsilon \cdot n(\varepsilon) d\varepsilon \right)^2$$

Si l'on définit  $g$  comme étant la fonction vérifiant :

$$g(\varepsilon) = -u''(\bar{W} + \varepsilon\sigma) n(\varepsilon)$$

$g(\varepsilon) > 0$  pour tout  $\varepsilon$ , et donc  $H$  se réécrit :

$$H = \int g(\varepsilon) d\varepsilon \int g(\varepsilon) \varepsilon^2 d\varepsilon - \left( \int g(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right)^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\int g(\varepsilon) d\varepsilon \int g(\varepsilon) \varepsilon^2 d\varepsilon > \left( \int g(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right)^2$$

Par conséquent le hessien est positif et donc  $V$  est une fonction (à deux variables) strictement concave. La stricte concavité de l'utilité implique la stricte convexité des courbes d'indifférence.

Par conséquent si un agent a une fonction d'utilité espérée et si sa richesse est normalement distribuée, si son ensemble de choix peut être défini dans le plan variance / espérance (ou écart-type / espérance), alors son choix optimal sera nécessairement un choix efficient, i.e. un choix maximisant l'espérance pour une variance donnée.

## 7.4 L'espérance variance comme approximation

En effet, selon l'importance du risque de portefeuille, le problème général peut être approximativement assimilé soit au problème d'un agent neutre au risque, soit au problème d'un agent "quadratique" :

**Proposition 2** *Si la richesse finale est déterminé non seulement par le revenu aléatoire du portefeuille  $\widetilde{W}$  mais par une richesse sûre  $W_0$ , alors le problème financier de l'agent considéré est approximativement :*

(i) *de maximiser l'espérance de son revenu  $\widetilde{W}$ ,  $\mathbf{E}\widetilde{W}$ , si  $\left(\frac{\widetilde{W}}{W_0}\right)^2$  est uniformément suffisamment petit ;*

(ii) *de maximiser une fonction  $V$  définie uniquement sur l'espérance et la variance de  $\widetilde{W}$  si  $\left(\frac{\widetilde{w}}{W_0}\right)^3$  est uniformément suffisamment petit.*

**démonstration :**

On note  $\overline{W}$  l'espérance de la richesse investie dans des actifs risqués,  $\sigma_W^2$  sa variance.

(i) Si  $\left(\frac{\widetilde{w}}{W_0}\right)^2$  est petit alors  $u(W_0 + \widetilde{W})$  peut être approximé par un développement de Taylor d'ordre 1 autour de  $W_0$  :

$$u(W_0 + \widetilde{W}) \approx u(W_0) + u'(W_0)\widetilde{W}$$

les termes d'ordre supérieur du développement limité étant négligeables. Comme  $u(W_0)$  et  $u'(W_0)$  sont fixes, l'espérance de l'utilité vérifie :

$$\mathbf{E}u(W_0 + \widetilde{W}) \approx u(W_0) + u'(W_0)\mathbf{E}[\widetilde{W}]$$

Maximiser  $\mathbf{E}u(W_0 + \widetilde{W})$  revient à maximiser  $\mathbf{E}\widetilde{W}$  : le gérant de portefeuille se comporte donc alors approximativement comme un agent neutre au risque.

(ii) si  $\left(\frac{\widetilde{w}}{W_0}\right)^3$  est petit, le développement en série est nécessairement d'ordre 2 et il s'écrit :

$$\begin{aligned} u(W_0 + \widetilde{W}) &\approx u(W_0) + u'(W_0)\widetilde{W} + \frac{1}{2}u''(W_0) \cdot (\widetilde{W})^2 \\ &= u(W_0) + u'(W_0) \left[ \widetilde{W} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u''(W_0)}{u'(W_0)} \cdot (\widetilde{W})^2 \right] \end{aligned}$$

$\frac{u''(W_0)}{u'(W_0)}$  est au signe près le coefficient d'Arrow-Pratt d'aversion absolue à l'égard du risque (évalué en  $W_0$ ), que l'on note  $A$  :

$$A = -\frac{u''(W_0)}{u'(W_0)}$$

L'espérance de l'utilité est donc approximativement égale à :

$$\mathbf{E} \left[ u(W_0 + \widetilde{W}) \right] = u(W_0) + u'(W_0) \left[ \mathbf{E} \left[ \widetilde{W} \right] - \frac{A}{2} \mathbf{E} \left[ \left( \widetilde{W} \right)^2 \right] \right]$$

Comme la variance  $\sigma_W^2$  est égale à :

$$\sigma_W^2 = \mathbf{E} \left[ \left( \widetilde{W} \right)^2 \right] - \mathbf{E} \left[ \widetilde{W} \right]^2$$

l'utilité espérée se réécrit :

$$\mathbf{E} \left[ u(W_0 + \widetilde{W}) \right] = u(W_0) + u'(W_0) \left[ \left( \overline{W} - \frac{A}{2} \overline{W}^2 \right) - \frac{A}{2} \sigma_W^2 \right]$$

Comme  $W_0$  est fixe, et donc également  $u(W_0)$  et  $u'(W_0)$ , maximiser l'espérance d'utilité revient à maximiser le terme entre crochets, ou encore la fonction  $V$  :

$$V(\overline{W}, \sigma_W^2) = \left( \overline{W} - \frac{A}{2} \overline{W}^2 \right) - \frac{A}{2} \sigma_W^2$$

■

## 8 Annexe : Propriété du portefeuille optimal

La connaissance de la valeur des multiplicateurs permet aussi d'exprimer le portefeuille en fonction des variables exogènes, du rendement espéré objectif  $\widehat{R}$ . En reportant la valeurs des multiplicateurs dans les conditions de premier ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \boldsymbol{\sigma}^{-1} \left( \frac{C \cdot \widehat{R} - A}{D} \mathbf{R} + \frac{B - A \widehat{R}}{D} \mathbf{1} \right) \\ &= \frac{B \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} - A \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R}}{D} + \frac{C \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - A \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1}}{D} \widehat{R} \end{aligned}$$

Si on note  $\mathbf{p}_0$  et  $\mathbf{p}_1$  les vecteurs colonnes suivants :

$$\mathbf{p}_0 = \frac{B \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1} - A \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R}}{D}, \quad \mathbf{p}_1 = \frac{C \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{R} - A \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{1}}{D}$$

le résultat suivant est immédiat :

**Propriétés 1** *Les choix optimaux sont linéaires par rapport au rendement exigé :*

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \widehat{R} \mathbf{p}_1 \tag{56}$$

où les vecteurs  $\mathbf{p}_0$  et  $\mathbf{p}_1$  ne dépendent que de la matrice des variances/covariances et de rendements.

L'analyse du vecteur colonne  $\mathbf{p}_0$  montre que celui-ci est un portefeuille :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}^\top \mathbf{p}_0 &= \mathbf{1}^\top \frac{B\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbf{1} - A\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overline{\mathbf{R}}^\top}{D} \\ &= \frac{B\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbf{1} - A\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\sigma}^{-1}\overline{\mathbf{R}}^\top}{D} \\ &= \frac{BC - A^2}{D} = 1\end{aligned}$$

alors que  $\mathbf{p}_1$  est seulement la direction dans laquelle on doit modifier le portefeuille initiale lorsque le rendement exigé augmente :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}^\top \mathbf{p}_1 &= \mathbf{1}^\top \frac{C\boldsymbol{\sigma}^{-1}\overline{\mathbf{R}}^\top - A\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbf{1}}{D} \\ &= \frac{CA - AC}{D} \\ &= 0\end{aligned}$$

Un corollaire de ces résultats est que  $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1$  est un portefeuille puisque :

$$\mathbf{1}^\top (\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1) = \mathbf{1}^\top \mathbf{p}_0 + \mathbf{1}^\top \mathbf{p}_1 = 1 + 0 = 1$$

L'équation (56) permet de caractériser plus avant les portefeuilles  $\mathbf{p}_0$  et  $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1$  puisque :

$$\begin{aligned}\widehat{R} &= 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + 0.\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 \\ \widehat{R} &= 1 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + 1.\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1\end{aligned}$$

Le portefeuille  $\mathbf{p}_0$  est donc celui dont le rendement espéré est nul, le portefeuille  $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1$  celui de rendement unitaire (résultat dû à Merton [Mer72]).

L'intérêt de ces deux portefeuilles est de donner une méthode simple de construction des portefeuilles efficients. En effet, lorsque le rendement espéré objectif est  $\widehat{R}$ , le portefeuille efficient est :

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \widehat{R}.\mathbf{p}_1$$

lequel peut être réécrit comme une combinaison linéaire des deux vecteurs  $\mathbf{p}_0$  et  $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1$  puisque :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{p}_0 + \widehat{R}.\mathbf{p}_1 \\ &= \left[ \widehat{R} + (1 - \widehat{R}) \right] \mathbf{p}_0 + \widehat{R}.\mathbf{p}_1\end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbf{x} = (1 - \widehat{R}) \mathbf{p}_0 + \widehat{R} . (\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1) \tag{57}$$

Le portefeuille optimal donnant  $\widehat{R}$  est donc simplement obtenu en combinant obtenu à partir de ces deux portefeuilles de rendement 0 et 1 en combinant les deux vecteurs  $\mathbf{p}_0$  et  $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1$ .

Le calcul de la frontière des portefeuilles efficients, la détermination des portefeuilles optimaux par la combinaison des vecteurs  $\mathbf{p}_0$  et  $\mathbf{p}_1$  permet de vérifier une dernière propriété classique de la théorie des portefeuilles. Le portefeuille de variance minimale étant bien défini, les *portefeuilles efficaces* peut désormais être caractérisés par une espérance de rendement est supérieur à celle du portefeuille de variance minimale, i.e supérieure à  $A/C$ .

## Références

- [AE01] F. Aparicio and J. Estrada, (2001). Empirical distributions of stock returns : European securities markets, 1990-95. *European Journal of Finance*, 7(1) :1–21, 2001.
- [AG94] F. Allen and D. Gale, (1994). *Financial innovation and risk sharing*. MIT Press, Cambridge, MA, 1994.
- [Ber95] P.L. Bernstein, (1995). *Des idées capitales*. Finance. PUF, Paris, 1995. Traduction de "Capital ideas - the improbable origins of modern Wall Street" (1992).
- [Bla88] F. Black, (1988). Option formulas and nikkei options. Working paper, 1988.
- [CM95] G. Constantinidès and A.G. Malliaris, (1995). Portfolio theory. In R. Jarrow et Alii, editor, *Finance*, chapter 1. Elsevier, 1995. vol. 9 du Handbook in Organizational Research and Management Science.
- [Edg88] F.Y. Edgeworth, (1888). The mathematical theory of banking. *Journal of the Royal Statistical Society*, 1888.
- [Fis06] I. Fisher, (1906). *The nature of capital and income*. MacMillan, 1906.
- [Fis30] I. Fisher, (1930). *Theory of interest*. MacMillan, N.Y, 1930.
- [FW93] S. Figlewski and G. Webb, (1993). Options, short sales, market completeness. *Journal of Finance*, 48(2) :761–777, June 1993.
- [Hic35] J.R. Hicks, (1935). A suggestion for simplifying the theory of money. *Economica*, février 1935.

- [Hic39] J.R. Hicks, (1939). *Value and capital*. Oxford University Press, 2 ème edition, 1939.
- [Ing87] J. Ingersoll, (1987). *Theory of financial decision*. Rowman & Littlefield, 1987.
- [Key68] J.M. Keynes, (1936). *Théorie Générale de l'Emploi, de l'Intérêt et de la Monnaie*. Payot, Paris, 1968. Ouvrage traduit par J. de Largentaye et publié en France pour la première fois en 1939.
- [Mar38] J. Marschak, (1936). Money and the theory of finance. *Econometrica*, 6 :311–25, 1938.
- [Mar52] H. Markowitz, (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, février 1952.
- [Mar59] H. Markowitz, (1959). *Portfolio selection : efficient diversification of investments*. Wiley, N.Y, 1959.
- [Mer72] R.C. Merton, (1972). An analytical derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7 :1851–72, 1972.
- [Riv02] Fabrice Riva, (2002). *Applications Financières En Excel Sous Visual Basic*. Economica, Paris, 2002.
- [Sha64] W. Sharpe, (1964). Capital asset prices : a theory of market equilibrium under condition of risk. *Journal of Finance*, septembre 1964.
- [Tob58] J. Tobin, (1958). Liquidity preferences as behavior toward risk. *Review of Economic Studies*, 25 :65–86, 1958.
- [Wil38] J.B. Williams, (1938). *The theory of investment value*. Harvard University Press, Cambridge, M.A, 1938.