Erreur d’estimation et allocation d’actifs

Les problèmes de la Mise en œuvre de la Théorie du portefeuille

Agenda

- Part 1: La théorie du portefeuille
- Part 2 : Le paradoxe de Markowitz
- Part 2 : Le rééchantillonnage à la Michaud
- Part 3 : La solution bayésienne
- Part 4: Le modèle de Black & Litterman
- Part 5 : Les autres modèles bayésiens

La théorie du portefeuille

Les apports d’une théorie élégante et concise

L'optimisation moyenne-variance

- Inputs :
  - rendements
  - volatilités
  - corrélations
- calcul de la frontière des portefeuilles efficients
- résultat : sélection du portefeuille optimal sur la frontière

Le portefeuille optimal

Présentation formelle

- Cadre et notations:
- J actifs indicés j=1,….,J résumés par
  - le rendement espéré $\bar{r}_j$
  - la volatilité (= écart-type) σ_j
  - la matrice de covariance

$$\sigma = \left[\sigma_{ij}\right]$$

- Un portefeuille est défini par les parts des titres qui le composent

➢ part du titre j $\qquad x_j$

➢ portefeuille :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_j \\ \cdot\cdot \\ x_J \end{bmatrix}$$

- portefeuille au sens stricte (a fully invested portfolio)

$$\vec{1}^{T}.\vec{x}=1$$

sinon une source de financement supplémentaire (si >1) est nécessaire

Le programme d'optimisation

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}\sigma_p^2 \\ \text{s.c.:} \\ r_p = \vec{r}^T \vec{x} \geq \hat{r} \\ \vec{1}^T . \vec{x} = 1 \end{cases}$$

Les conditions marginales

- Pour tout titre j

$$\sum_i x_i . \sigma_{ij} = \lambda \bar{r}_j - \mu$$

Avec :

$$\sum_i x_i . \sigma_{ij} = \mathrm{cov}(\tilde{r}_j, \tilde{r}_p)$$

$$\begin{cases} \sum_i x_{i}.\sigma_{1i} = \lambda \bar{r}_1 - \mu \\ \cdots \\ \sum_i x_{i}.\sigma_{ji} = \lambda \bar{r}_j - \mu \\ \cdots \\ \sum_i x_{i}.\sigma_{Ji} = \lambda \bar{r}_J - \mu \end{cases} \qquad \sigma \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_j \\ \cdots \\ x_J \end{bmatrix} = \lambda . \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \cdots \\ \bar{r}_j \\ \cdots \\ \bar{r}_J \end{bmatrix} - \mu . \begin{bmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sous forme vectorielle,
les conditions marginales sont donc:

$$\sigma.\vec{x}=\lambda.\vec{r}-\mu.\vec{1}$$

et donc le portefeuille optimal est :

$$\vec{x}=\lambda.\sigma^{-1}.\vec{r}-\mu.\sigma^{-1}\vec{1}$$

Le portefeuille efficient

- Pour déterminer la valeur des paramètres λ et μ :

  - contrainte budgétaire
  - contrainte de rendement

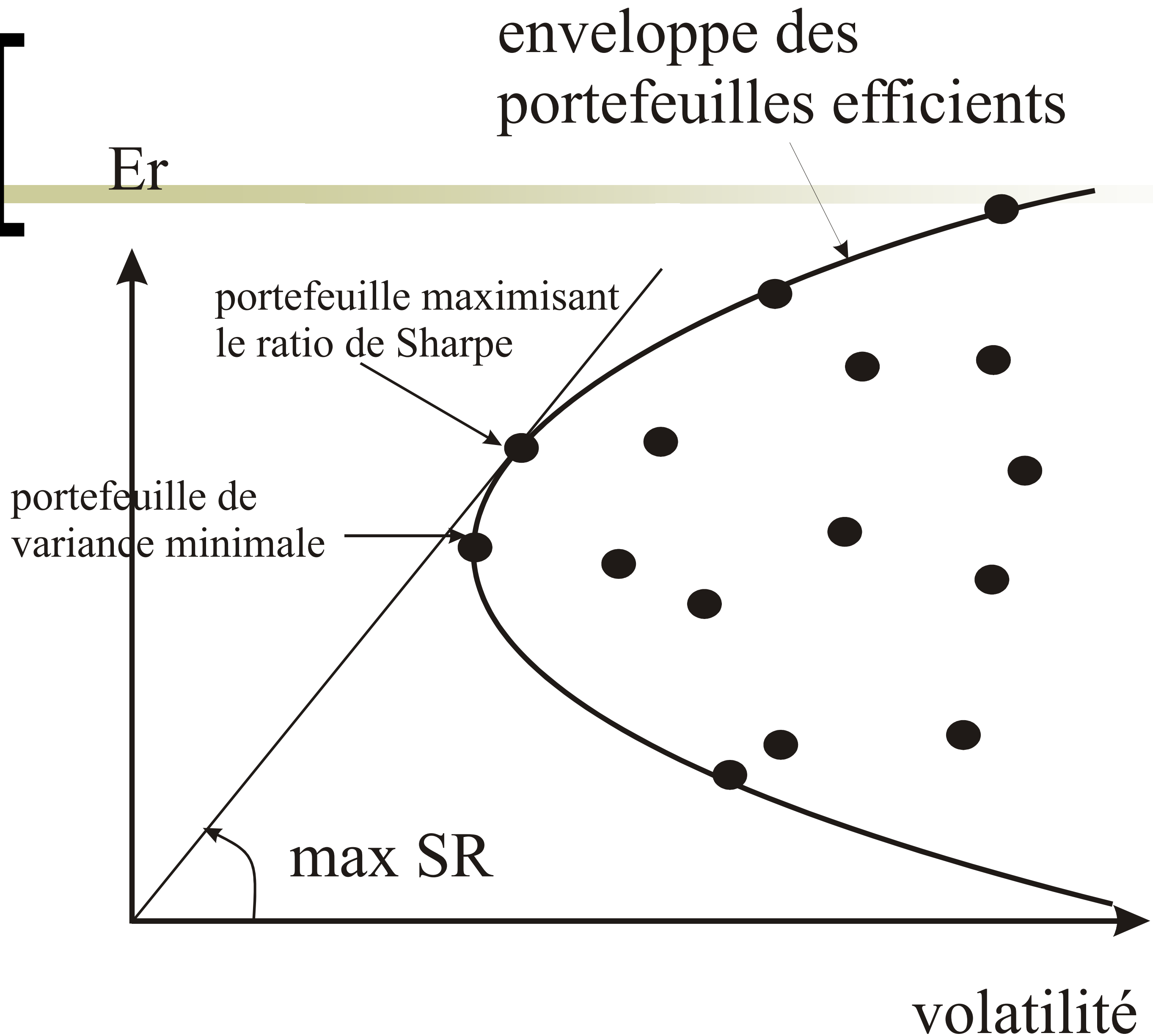
Le portefeuille efficient (suite)

Les étapes des calculs :

$$\left.\begin{matrix}\lambda \\ \\ \mu\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \vec{x} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix}Er_p \\ \\ \sigma_p^2\end{matrix}\right.$$

La frontière efficiente des portefeuilles

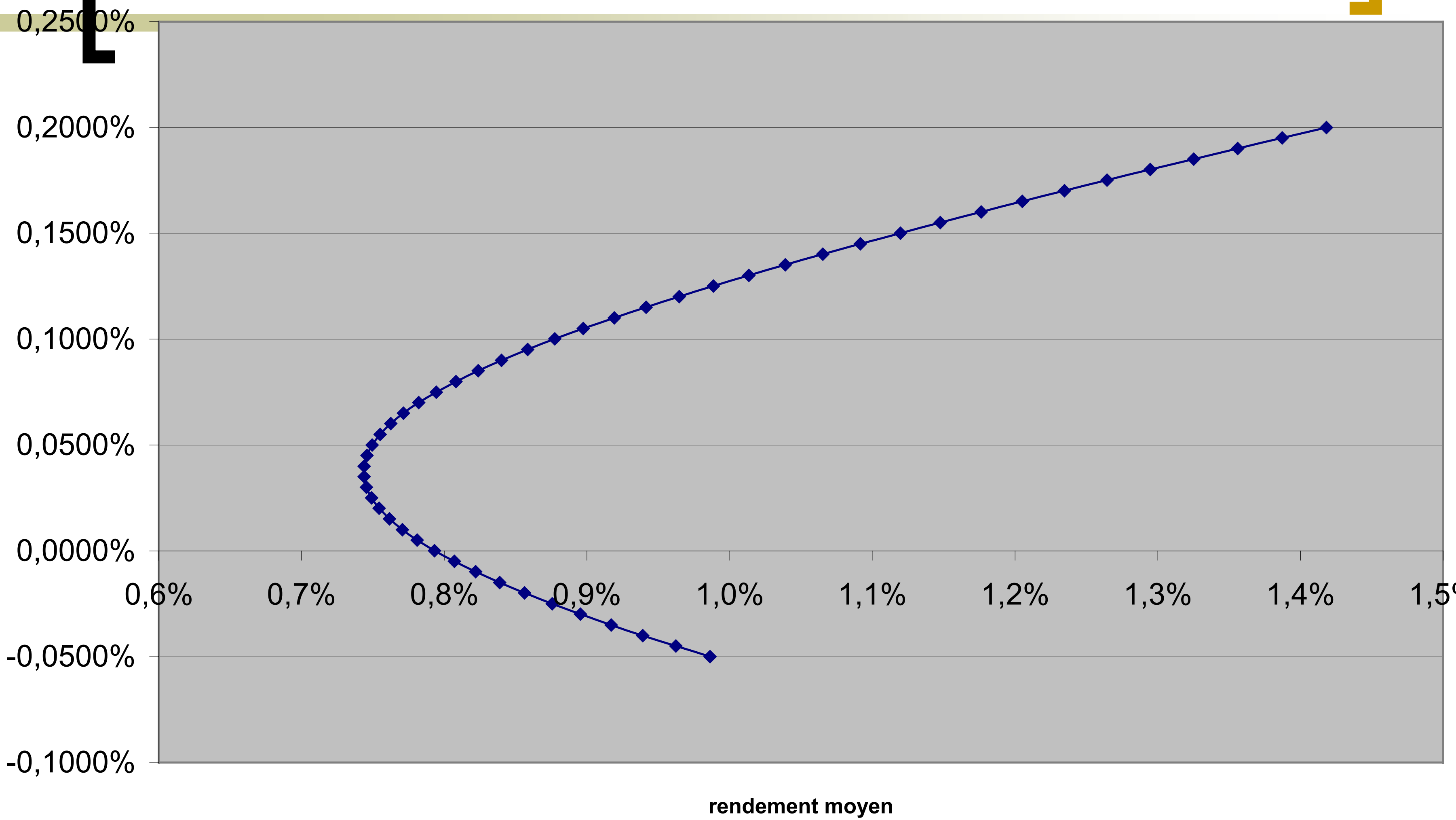
- L’ensemble des couples (risque,rendement espéré) des portefeuilles efficients = la frontière efficiente des portefeuilles


enveloppe des
portefeuilles efficients
Er
portefeuille maximisant
le ratio de Sharpe
portefeuille de
variance minimale
max SR
volatilité

- Un exemple de frontière efficiente des portefeuilles:

échantillon de 50 titres en données quotidiennes pour la France 1986-91

L'enveloppe des portefeuilles possibles



La gestion indicielle optimale

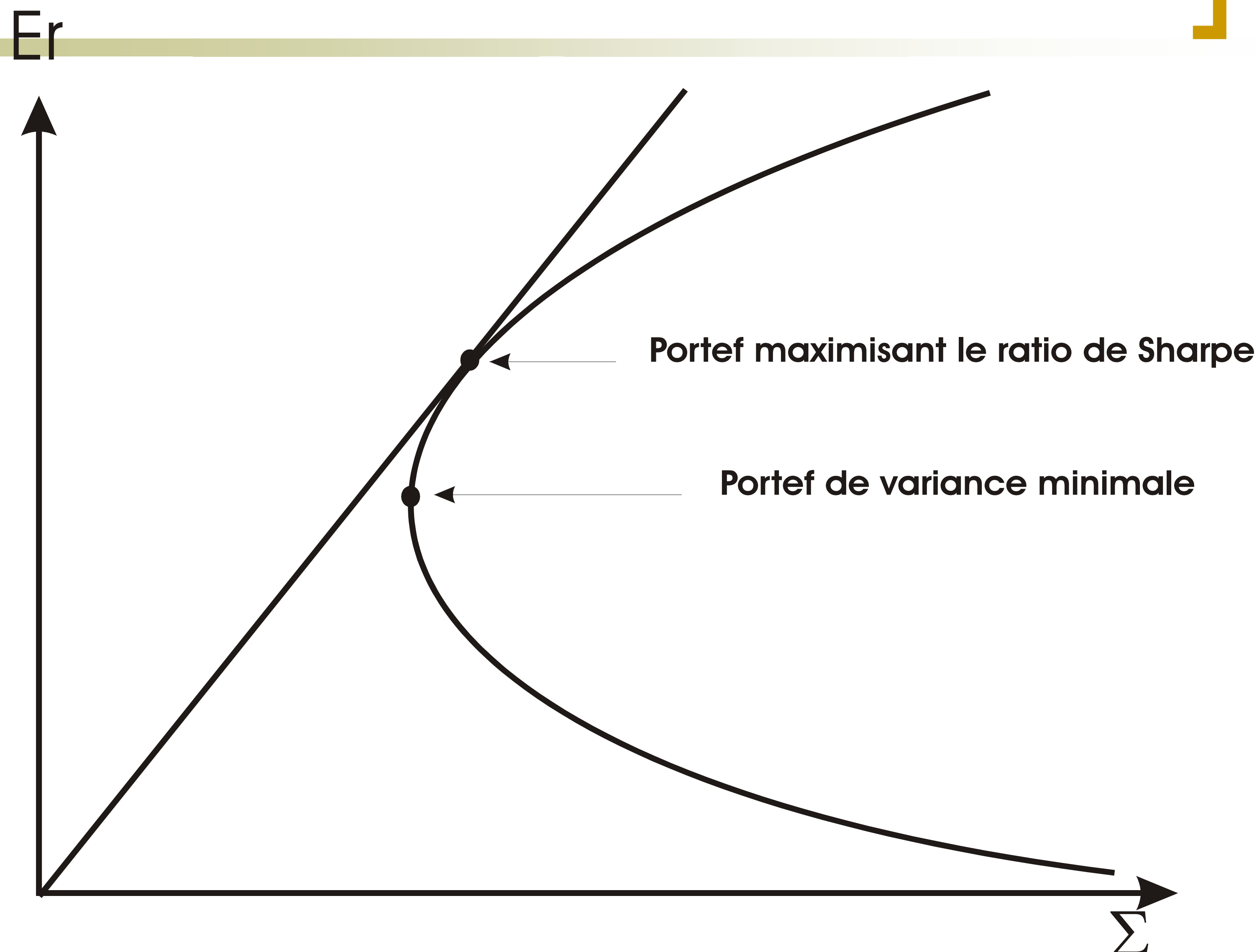
- Le théorème des deux fonds à la Fischer Black (1972)
  - Une base de deux portefeuilles (au sens strict)
    - Portefeuille de variance minimale
    - Portefeuille maximisant le ratio de Sharpe

Le portefeuille de variance minimale

$$\vec{x}_{\min} = \frac{1}{\vec{1}^{T} \sigma^{-1} \vec{1}} . \sigma^{-1} \vec{1}$$

Le portefeuille maximisant le ratio de Sharpe

$$\vec{x}_{SR} = \frac{1}{\vec{1}^{T} \sigma^{-1} \vec{r}} . \sigma^{-1} \vec{r}$$


Er
Portef maximisant le ratio de Sharpe
Portef de variance minimale
Σ

Le portefeuille optimal comme combinaison des deux portefeuilles de la base :

$$\vec{x} = (\lambda . \vec{1} \, \sigma^{-1} . \vec{r}) . \vec{x}_{SR} - (\mu . \vec{1} . \sigma^{-1} \vec{1}) . \vec{x}_{\min}$$

- Remarque :

Les deux portefeuilles proposés définissent une des bases possibles donnant les portefeuilles efficients.

De même qu'en mathématiques, il existe une infinité de base vectorielles « équivalentes », dans la théorie il existe une infinité de couples de portefeuilles permettant d'obtenir l'ensemble des portefeuilles efficients.

Conséquences

- Conséquence de la structure des modèles
  - des prévisions sont nécessaires sur les rendements moyens, les volatilités, les corrélations futurs.
  - en général, les optimisateurs utilisent soit les variables historiques, soit permettent de créer ses propres prévisions.

Le paradoxe de Markowitz

Les difficultés de la théorie du portefeuille

Les valeurs historiques comme prévisions

- Justification : stationnarité (présumée) des rendements → littérature sur la marche aléatoire des rendements et des prix
- Avantage : simplicité
- Inconvénient : la structure des portefeuilles efficients

- Leçons des simulations sur données historiques :
  - les portefeuilles sont très concentrés;
  - les allocations sont très sensibles aux prévisions.

Un exemple

- Source : Zephyr Allocation Advisor
- Données 1986-1995

Historical Forescasts

source : Zephyr AllocationADVISOR

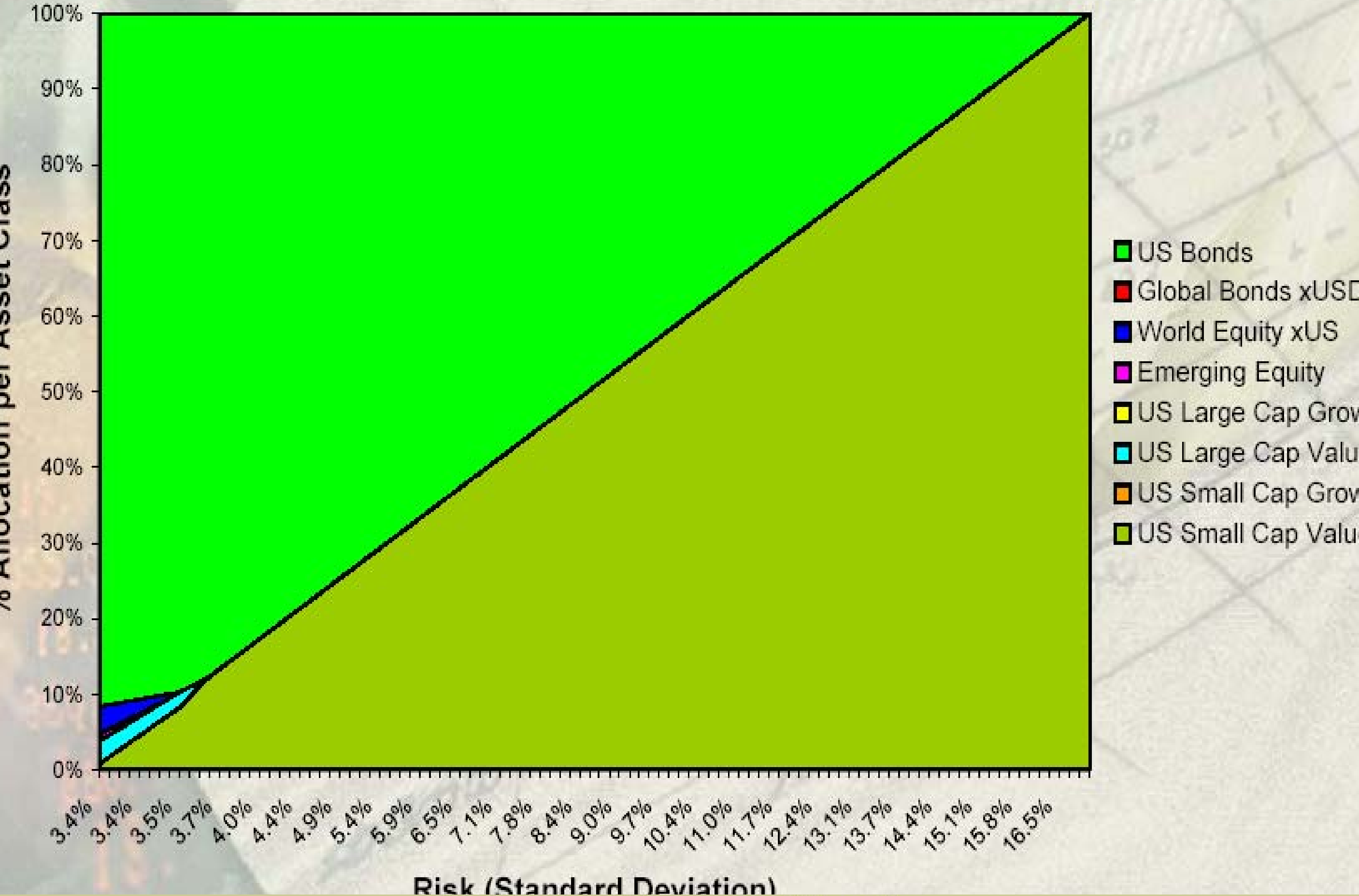
Analysis Inputs

Assets	Forecast Return	Forecast Risk	Date Start	Date End	Constraint Min	Constraint Max
US Bonds	8.34%	3.43%	9501	0306	0%	100%
Int'l Bonds	6.49%	8.14%	9501	0306	0%	100%
US Large Growth	10.69%	20.94%	9501	0306	0%	100%
US Large Value	12.87%	15.36%	9501	0306	0%	100%
US Small Growth	7.76%	27.57%	9501	0306	0%	100%
US Small Value	12.89%	15.66%	9501	0306	0%	100%
Int'l Dev. Equity	4.01%	15.19%	9501	0306	0%	100%
Int'l Emerg. Equity	2.29%	24.75%	9501	0306	0%	100%

Correlations

	1	2	3	4	5	6	7	8
1. US Bonds	1.0000							
2. Int'l Bonds	0.3972	1.0000						
3. US Large Growth	0.2325	-0.0320	1.0000					
4. US Large Value	0.2895	-0.0598	0.8242	1.0000				
5. US Small Growth	0.1334	-0.0785	0.8450	0.6979	1.0000			
6. US Small Value	0.2150	-0.1371	0.7244	0.8166	0.8681	1.0000		
7. Int'l Dev. Equity	0.1879	0.3856	0.6154	0.5838	0.5475	0.4964	1.0000	
8. Int'l Emerg. Equity	-0.0182	-0.1144	0.6516	0.5908	0.6736	0.6197	0.7069	1.000

MV Frontier Allocations (Historical)



La sensibilité des optimisateurs

- Les données utilisées :
  - Indices MSCI en actions
  - Avec une périodicité mensuelle
  - De janvier 1988 à juillet 2007
- Les pays : USA, UK, Japon, France, Allemagne, Italie, Espagne, Hong-Kong, pays émergents hors Asie, pays émergents d'Asie

La sensibilité des optimisateurs

	Er	volatilité
USA	8,68%	17,20%
UK	6,62%	16,46%
GERMANY	8,81%	21,95%
France	9,71%	19,74%
ITALY	5,36%	23,32%
SPAIN	8,47%	22,47%
JAPAN	-0,08%	23,97%
HONG KONG	9,40%	27,92%
EM ASIA	7,41%	26,85%
EM ex ASIA	15,09%	29,87%

La sensibilité des optimisateurs

	USA	UK	GERMANY	France	ITALY	SPAIN	JAPAN	HONG KONG	EM ASIA	EM ex AS
USA	1,00	0,74	0,64	0,68	0,50	0,66	0,49	0,60	0,64	0,61
UK	0,74	1,00	0,67	0,72	0,52	0,70	0,55	0,58	0,53	0,53
ERMANY	0,64	0,67	1,00	0,84	0,63	0,68	0,38	0,47	0,54	0,47
France	0,68	0,72	0,84	1,00	0,62	0,71	0,47	0,49	0,51	0,52
ITALY	0,50	0,52	0,63	0,62	1,00	0,65	0,42	0,37	0,44	0,42
SPAIN	0,66	0,70	0,68	0,71	0,65	1,00	0,53	0,53	0,53	0,63
JAPAN	0,49	0,55	0,38	0,47	0,42	0,53	1,00	0,44	0,50	0,46
ONG KONG	0,60	0,58	0,47	0,49	0,37	0,53	0,44	1,00	0,74	0,58
EM ASIA	0,64	0,53	0,54	0,51	0,44	0,53	0,50	0,74	1,00	0,60
M ex ASIA	0,61	0,53	0,47	0,52	0,42	0,63	0,46	0,58	0,60	1,00

La sensibilité des optimisateurs

- Le portefeuille optimal
  - pour un niveau d'aversion au risque = 5
  - Une absence de vente à découvert

La sensibilité des optimisateurs

Des statistiques représentatives

Eu	2,50%
Er	9,86%
StDev	17,17%
VAR normale 5%	-18,37%
variance	0,03
ratio de Sharpe	0,46

La sensibilité des optimisateurs

Un portefeuille optimal concentré

titre	parts
USA	44,52%
UNITED KINGDOM	8,42%
GERMANY	0,00%
France	30,81%
ITALY	0,00%
SPAIN	0,00%
JAPAN	0,00%
HONG KONG	0,00%
EM ASIA	0,00%
EM ex ASIA	16,24%

La sensibilité des optimisateurs

- Deux propriétés préoccupantes :
  - L’impact très important des ventes à découvert (VAD), plus généralement des contraintes de financement
  - La sensibilité à l’échantillonnage des données

L'impact des VAD

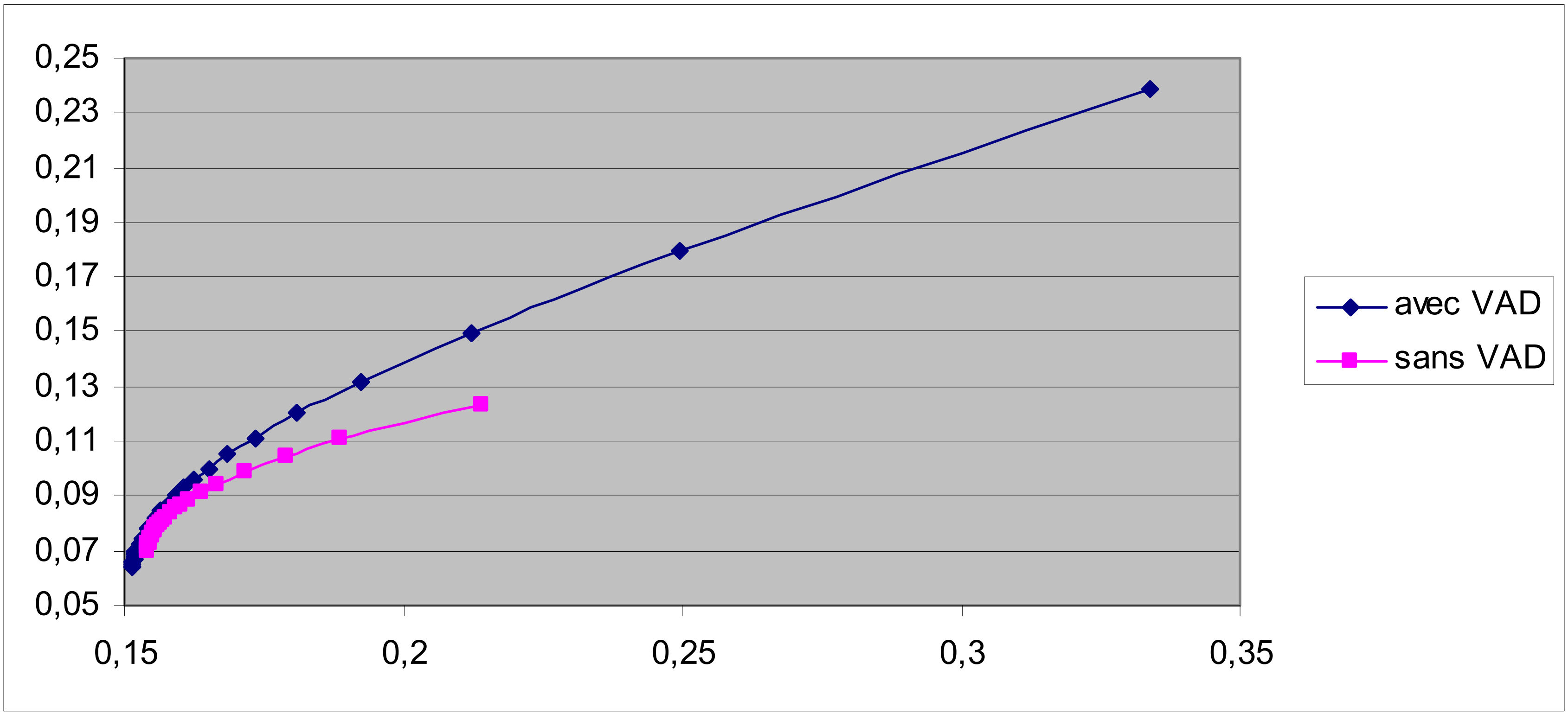
- L'impact des ventes à découvert

titre	parts
USA	56,43%
UNITED KINGDOM	33,34%
GERMANY	-11,78%
France	48,32%
ITALY	-1,69%
SPAIN	-8,81%
JAPAN	-32,67%
HONG KONG	1,38%
EM ASIA	-10,00%
EM ex ASIA	25,48%

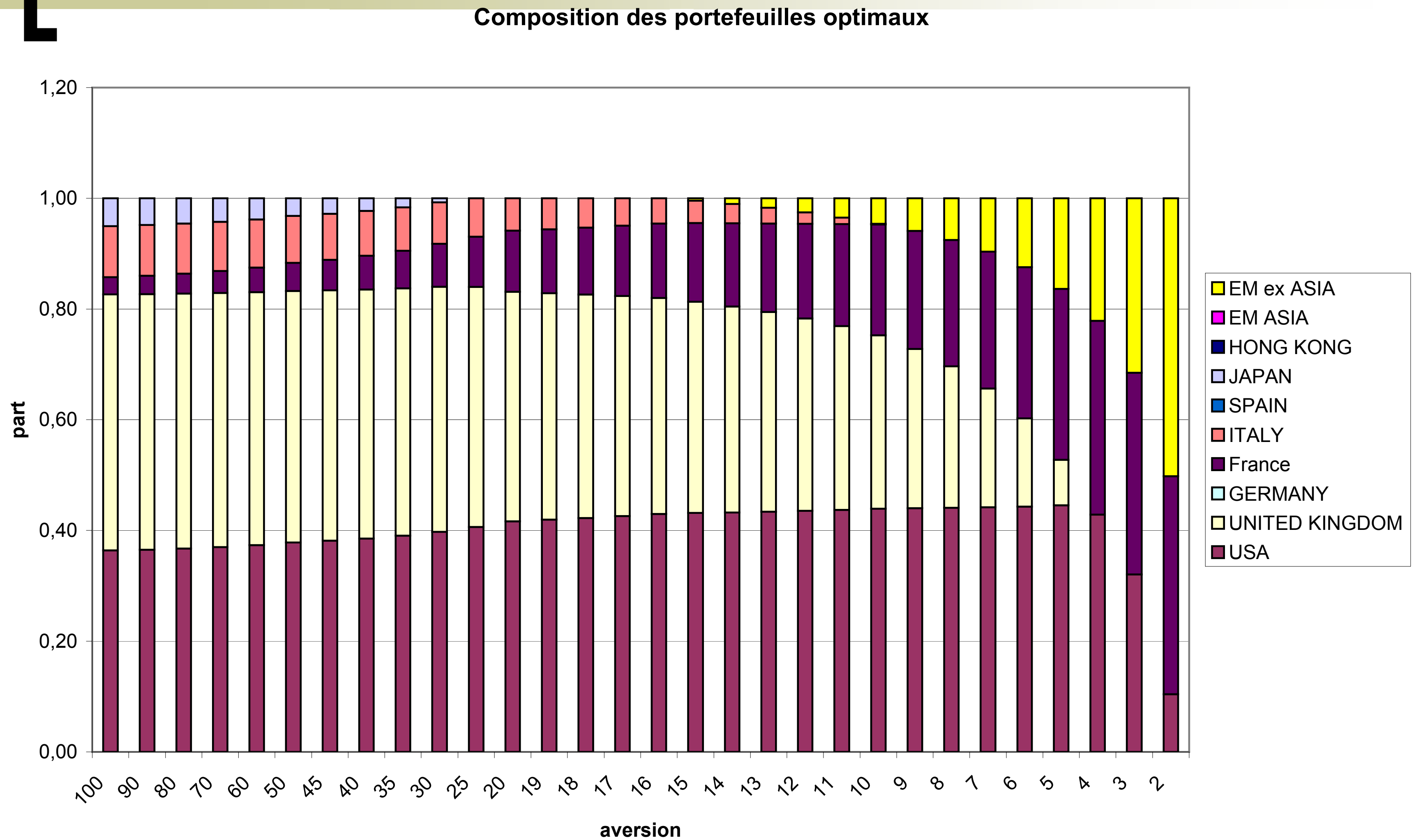
L’impact des VAD

	sans VAD	avec VAD
Eu	2,50%	3,87%
Er	9,86%	13,18%
StDev	17,17%	19,30%
VAR normale 5%	-18,37%	-18,56%
variance	0,03	0,04
ratio de Sharpe	0,46	0,58

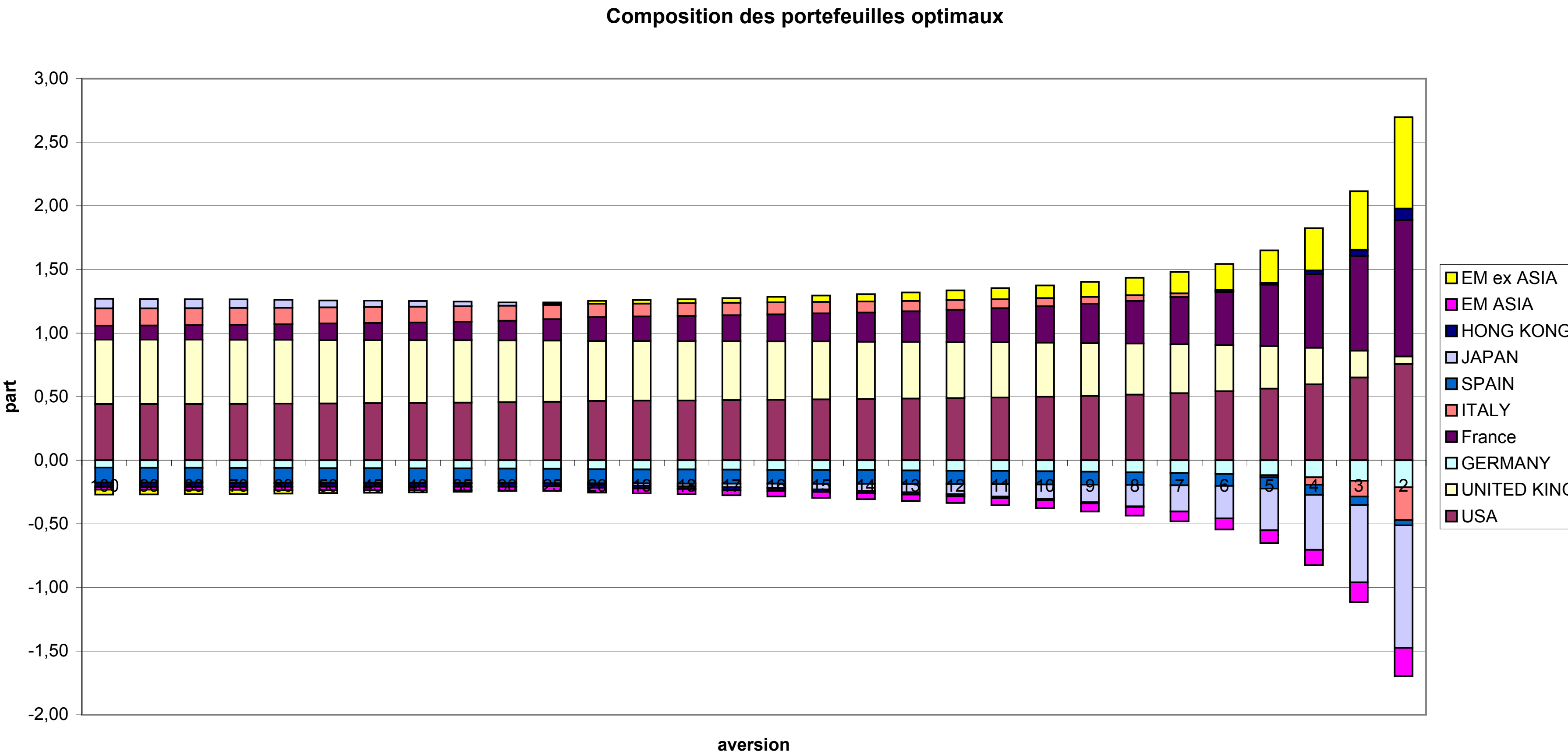
L’impact des VAD



L’impact des VAD



L’impact des VAD



L’impact des VAD

- Les causes de l’impact des ventes à découvert
  - L’arbitrage entre des valeurs très corrélées
- Les dangers des VAD
  - Connaissons-nous précisément les corrélations futures
    - Les mésaventures de l’arbitrage statistique

L’impact des VAD

- Remarque sur les résultats avec VAD:
  - Une allocation relativement équilibrée (par rapport à d’autres cas, cf plus loin)
  - La règle 120-20, 130-30, 150-30 pour certains niveaux d’aversion

La sensibilité à l’échantillonnage

- Les données historiques : uniquement un échantillon de la « population »
- Le problème de l’inférence des vraies valeurs à partir de l’échantillon
- Question : peut-on avoir confiance dans les données historiques

La sensibilité à l'échantillonnage

- Le cas financier sans doute le plus favorable à l'inférence :
  - L'hypothèse que les rendements sont distribués indépendamment et identiquement de période à période
  - Et que la distribution est normale
- Problème : la volatilité des titres financiers limite drastiquement l'inférence

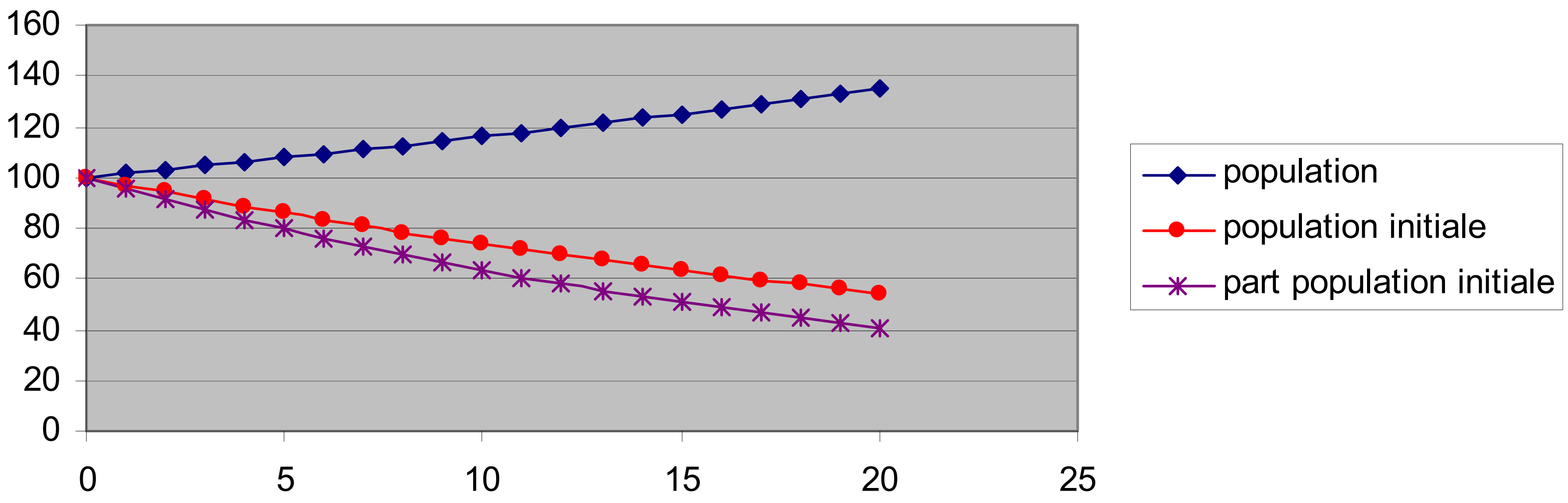
Contre-exemple par le resampling

- Le comme si :
  - Les statistiques (moyennes, covariances) sont les paramètres définissant la « vraie » loi des rendements
  - Resimulation de 1000 échantillons sur une durée de 20 ans (plus précisément 235 mois)
  - Remarque : 20 ans une durée difficile à étendre

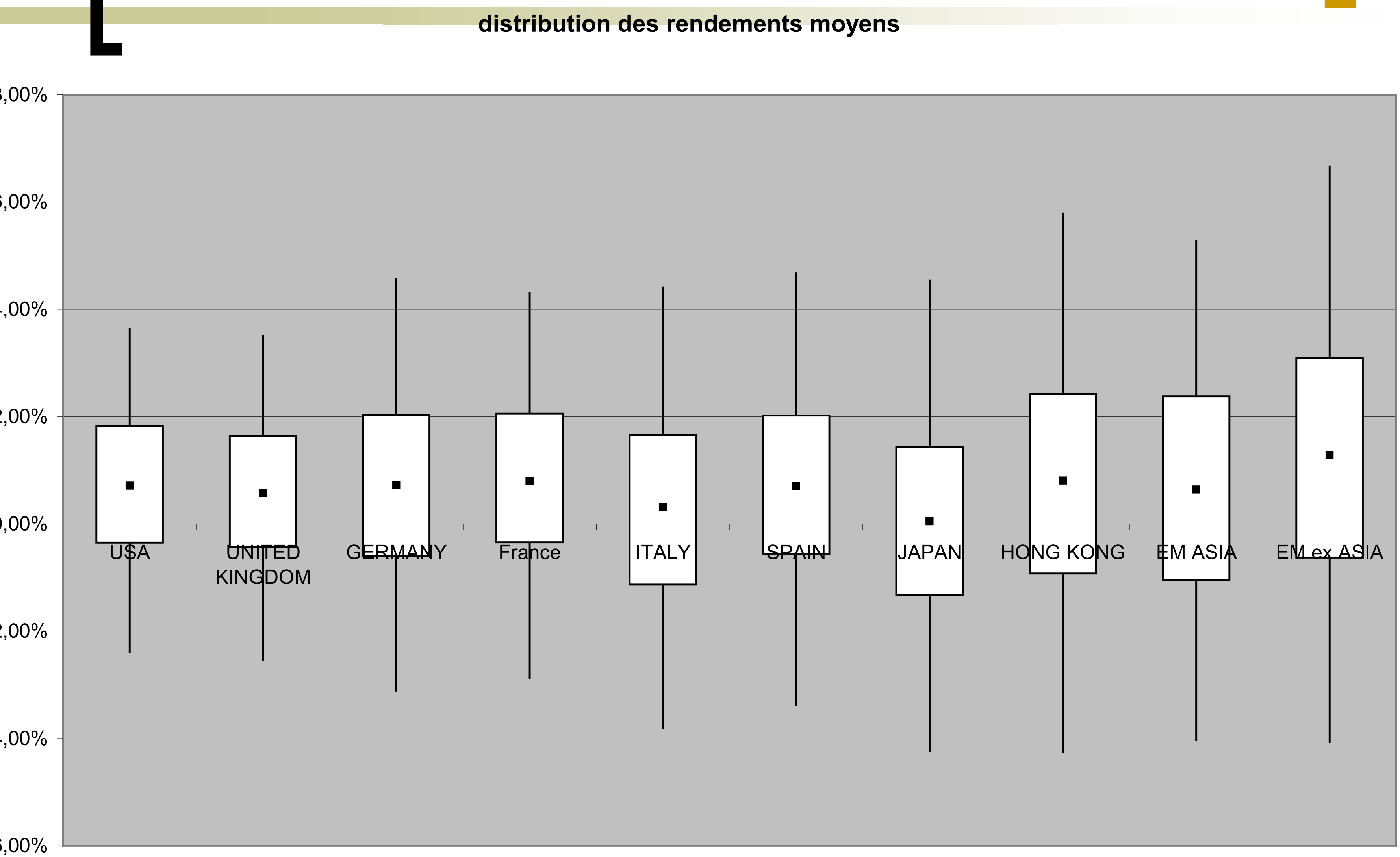
La sensibilité à l'échantillonnage

Les paramètres :
Taux de mortalité = 3%, Taux d'entrée = 4,5%

La population de la composition de la population (des mutual funds?)

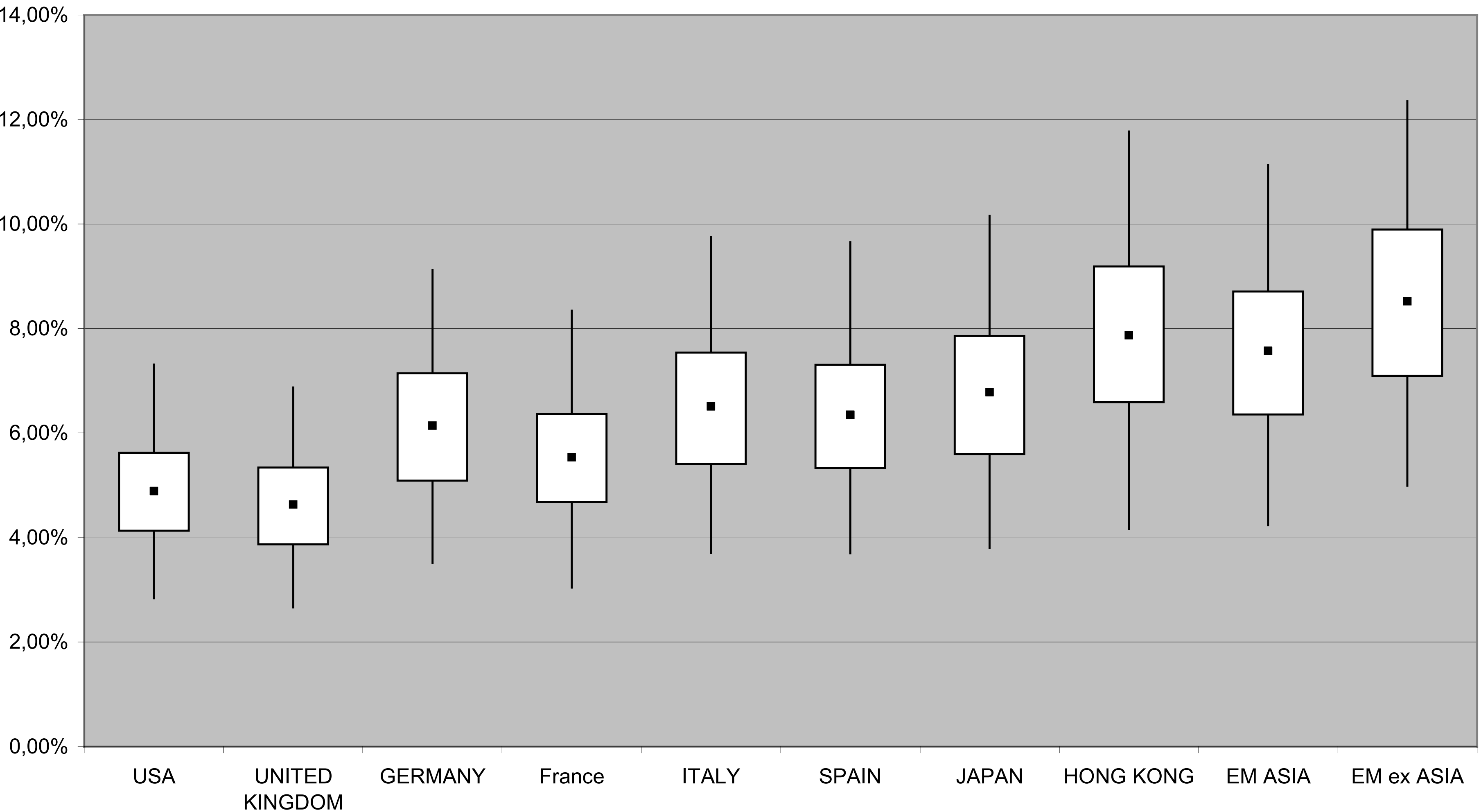


Les résultats : les rendements moyens



Les résultats : les volatilités

distribution des volatilités

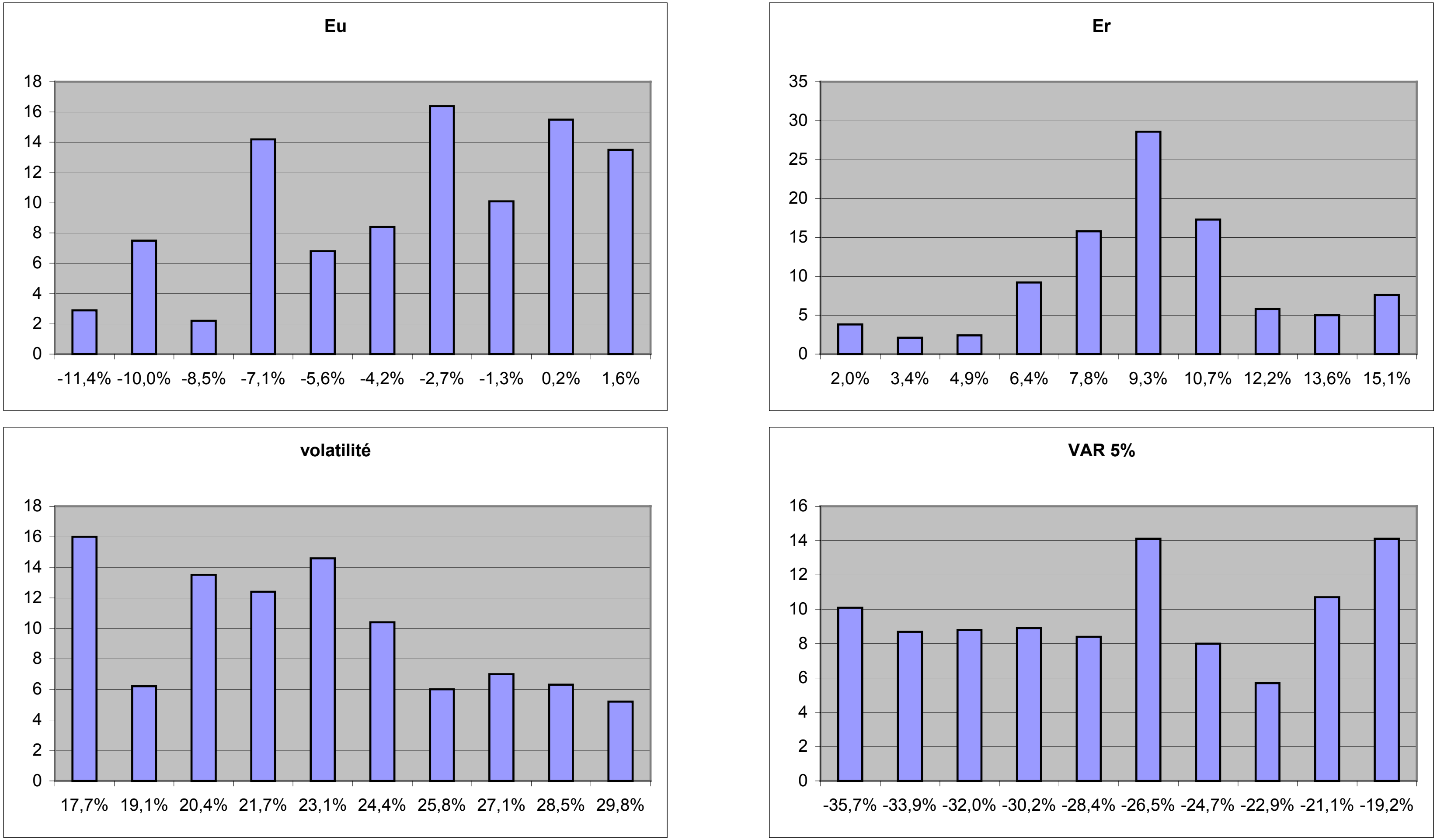


Résultats sur les rendements

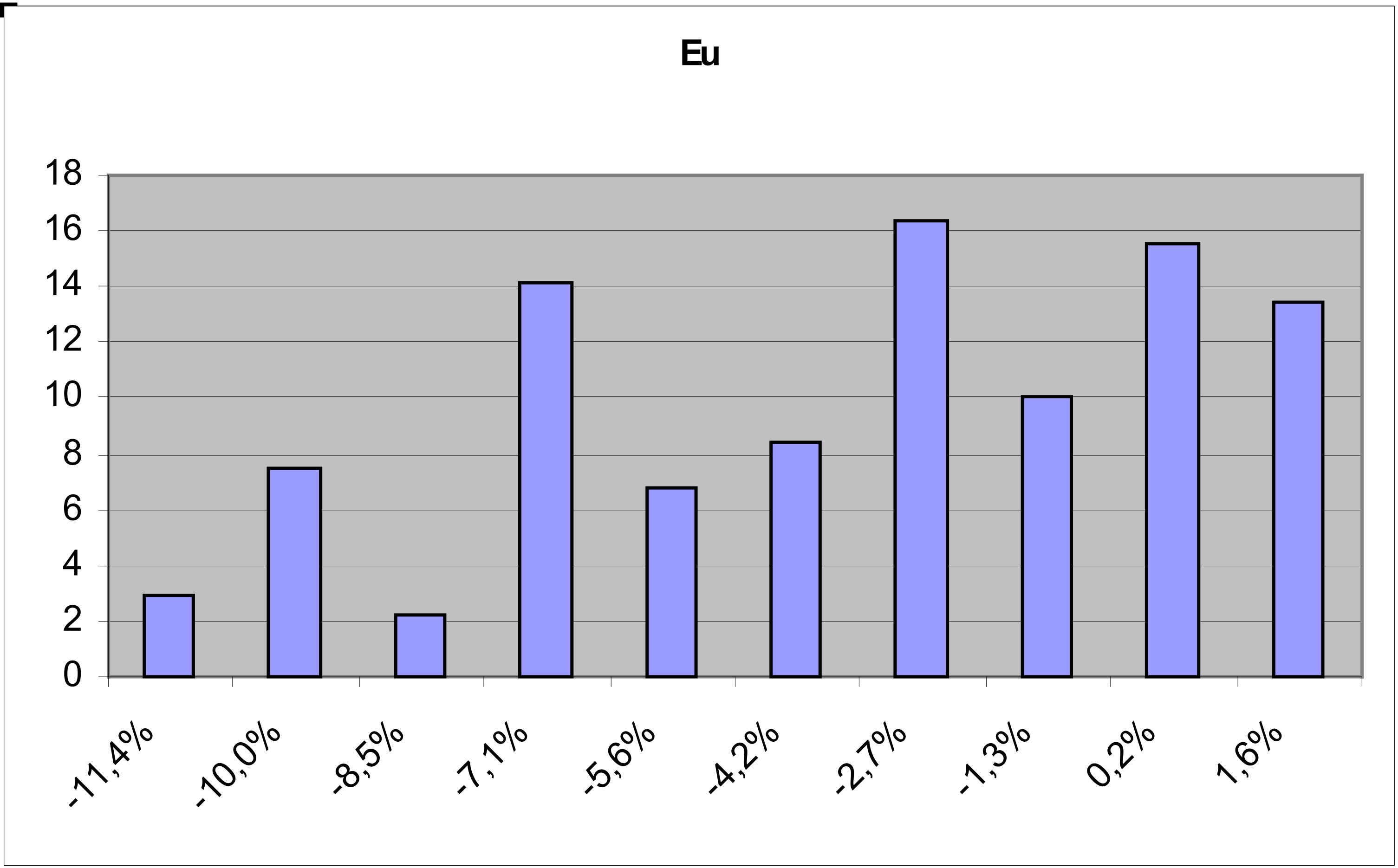
- La lenteur de la convergence des estimations même dans le cas iid normal!
- Conséquence au niveau des portefeuilles : l'éparpillement des performances de l'optimisation

La distribution des statistiques des portefeuilles optimaux

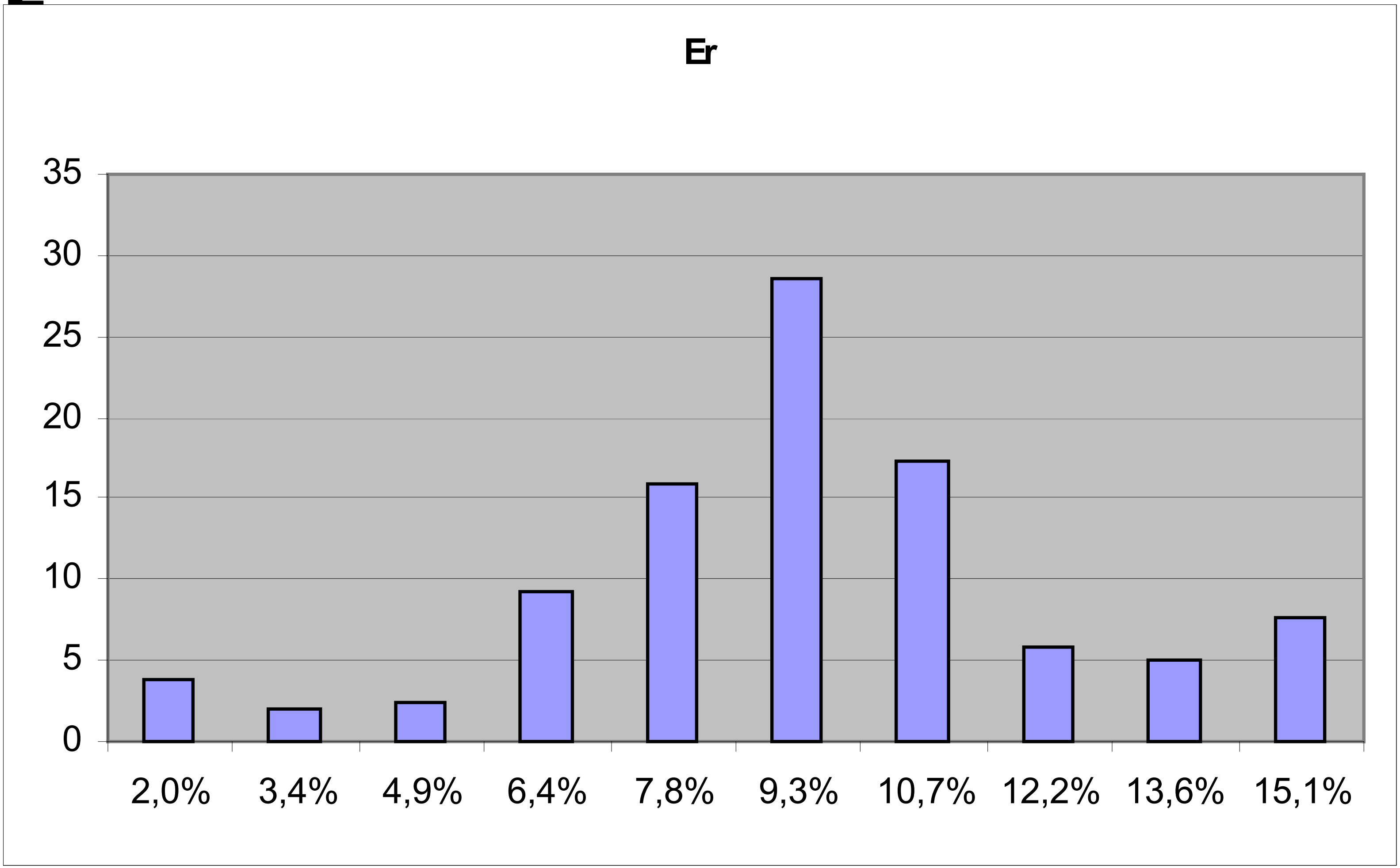
Distribution des statistiques des portefeuilles optimaux



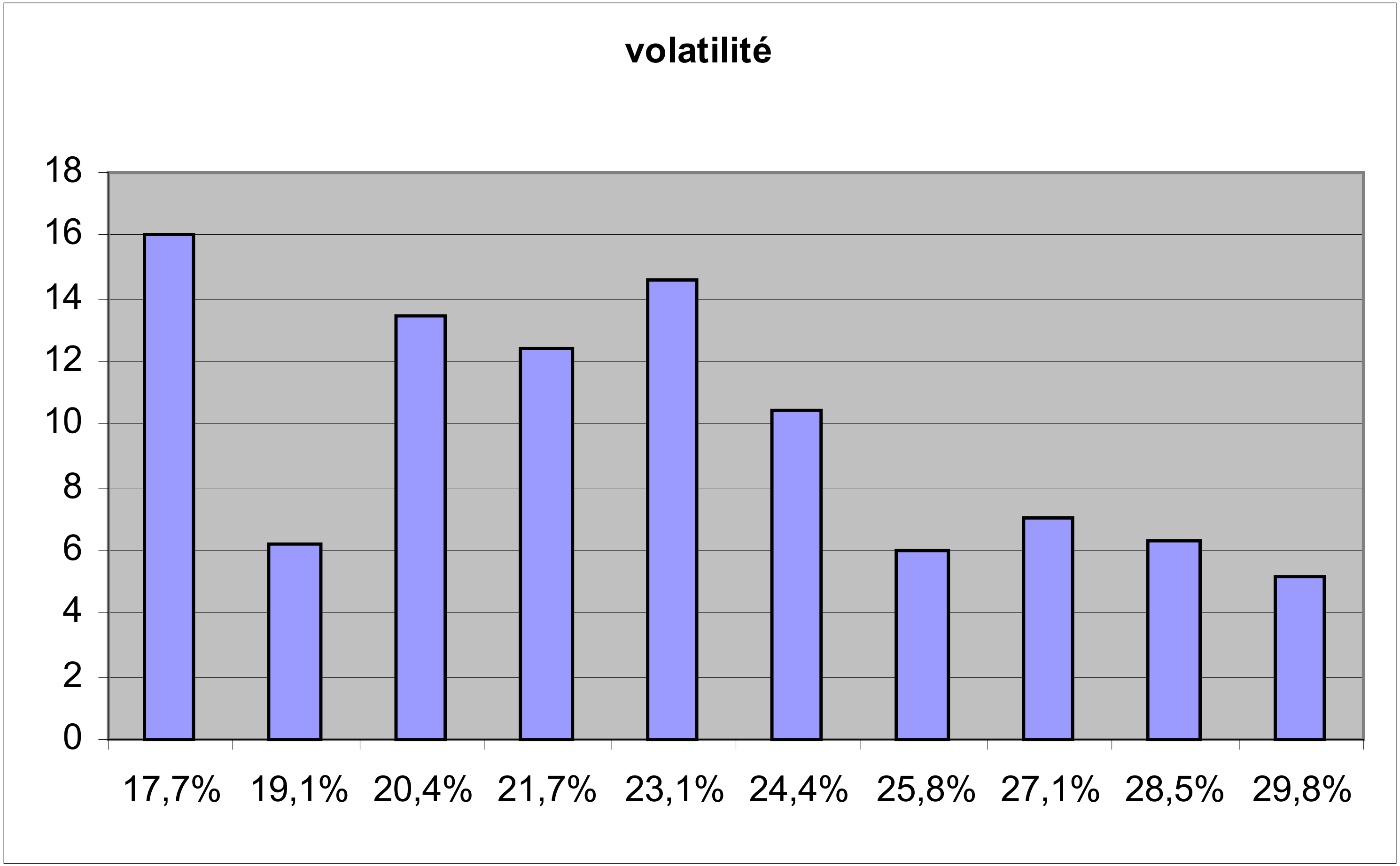
Le graphique le plus « informatif »



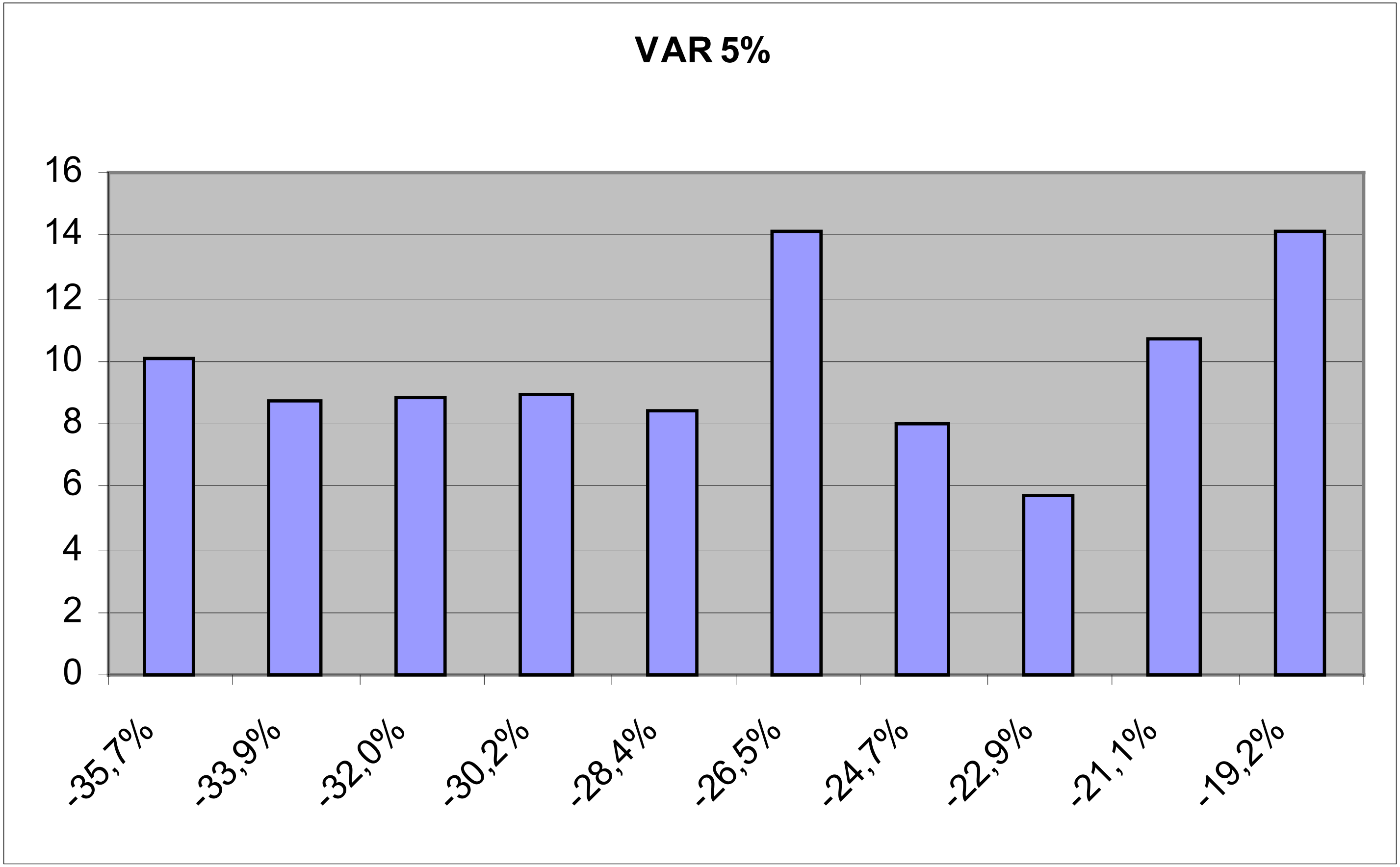
Les rendements moyens



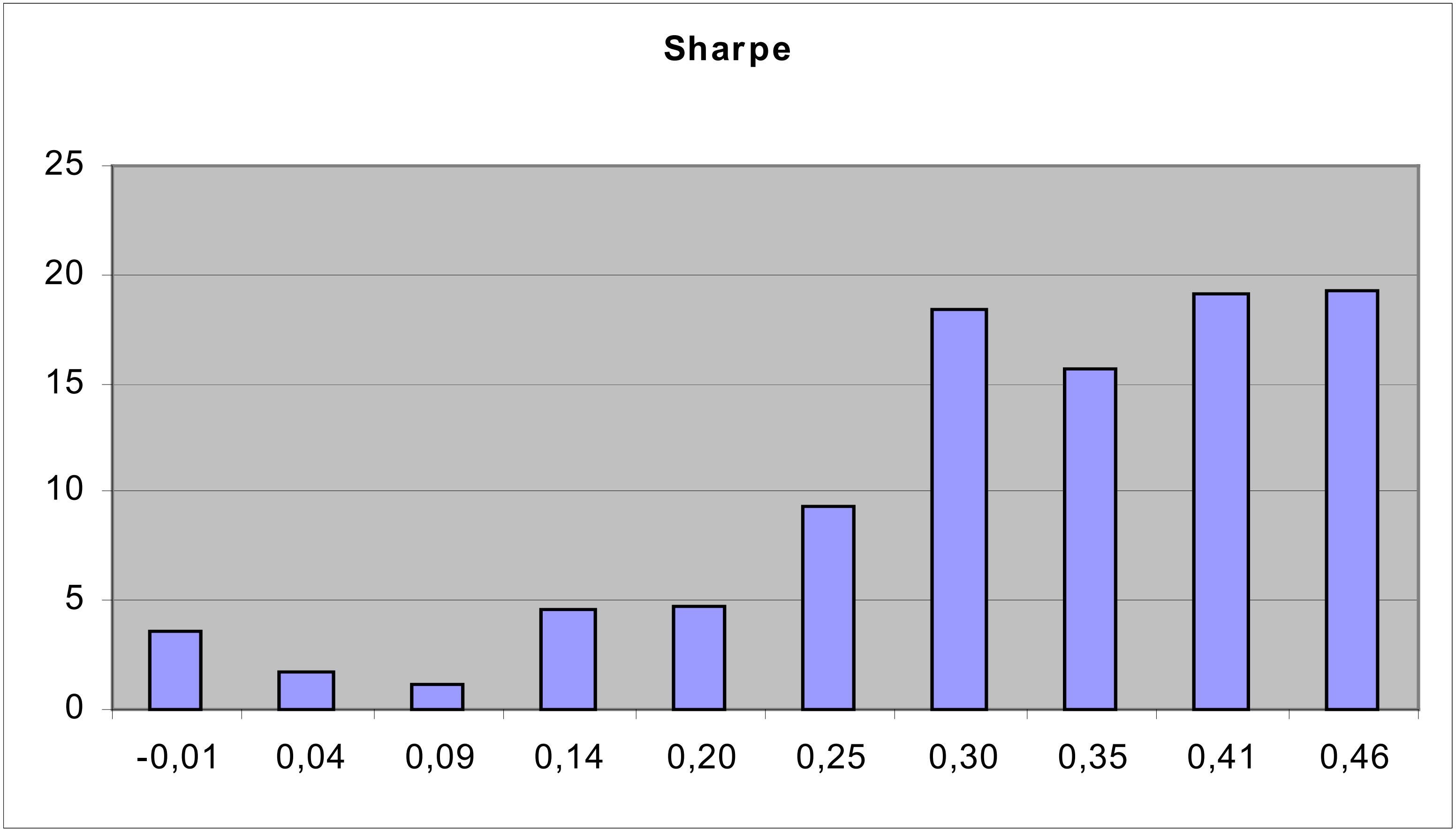
Les volatilités



La VAR paramétrique à 5%

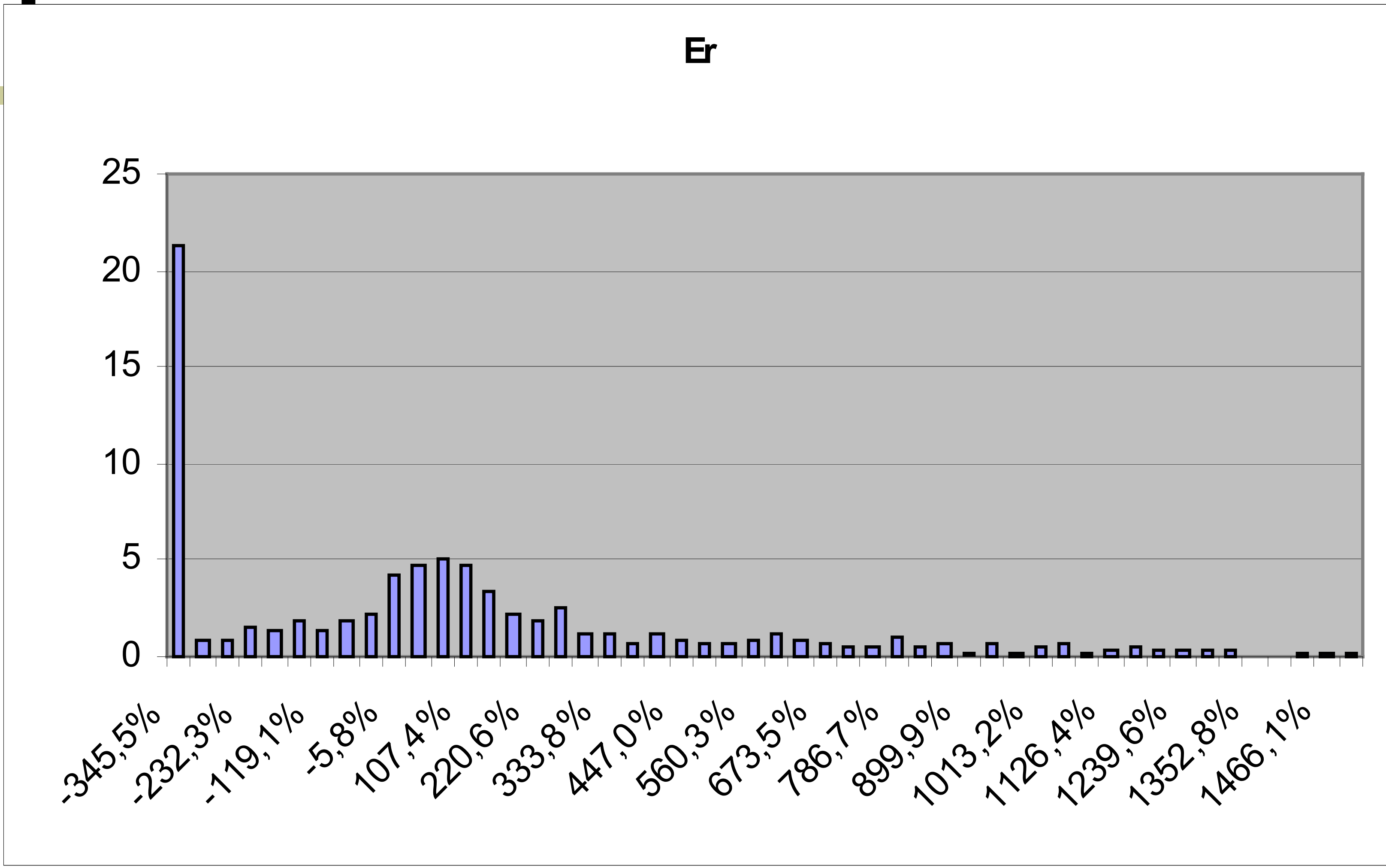


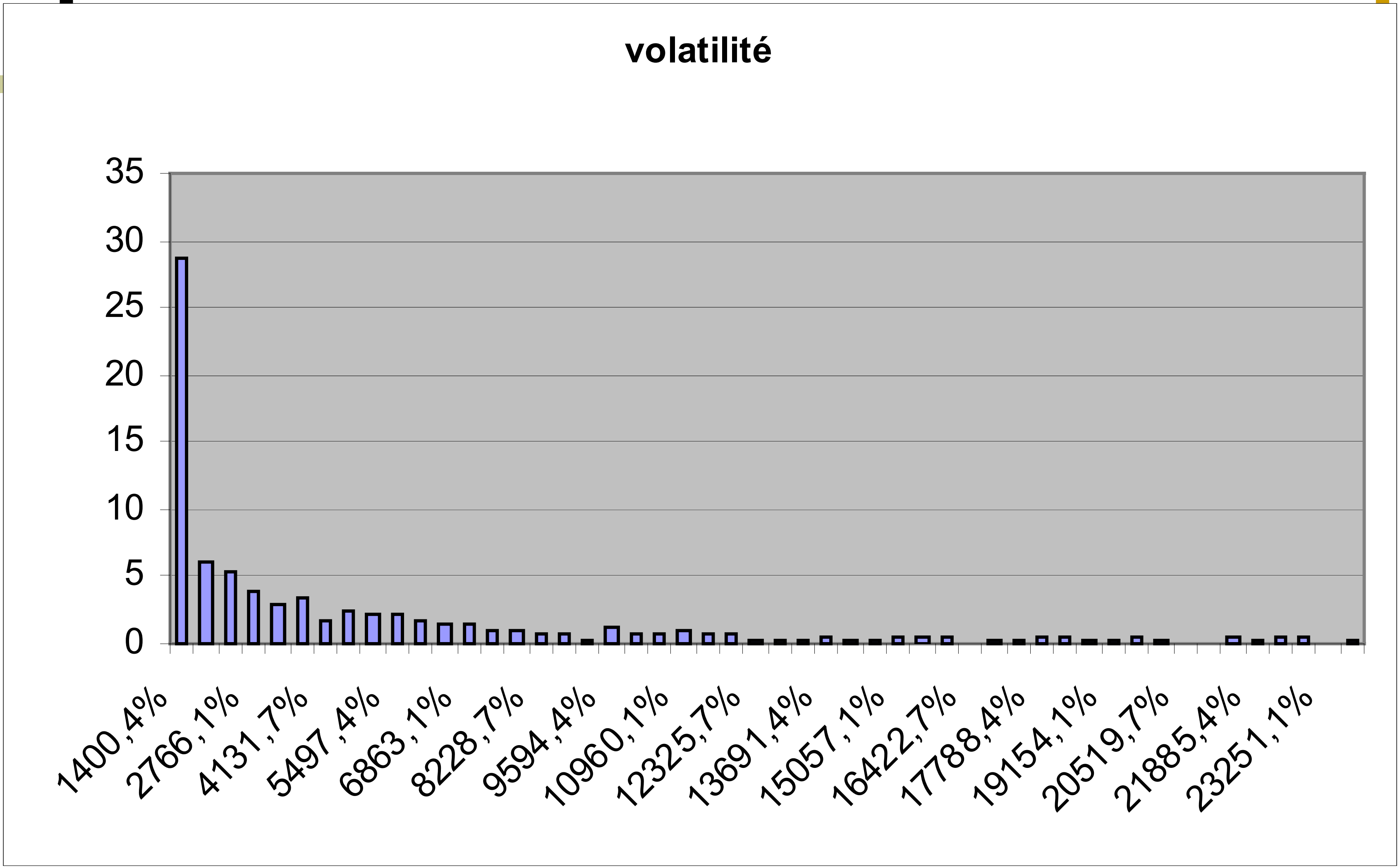
Le ratio de Sharpe



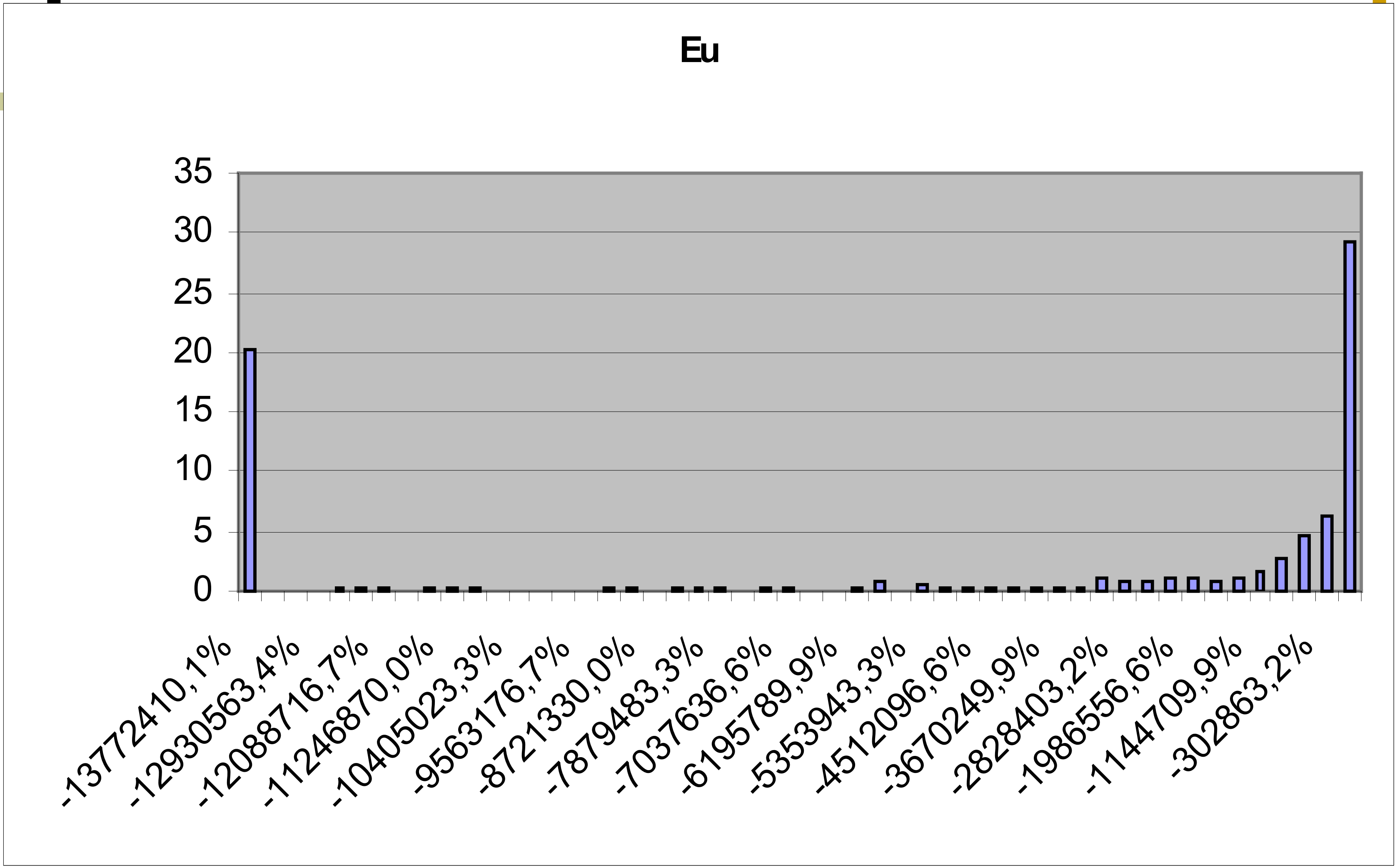
La sensibilité à l'échantillonnage

- Si on relâche les contraintes de financement, les performances sont pires encore!


Er
25
20
15
10
5
0
-345,5%
-232,3%
-119,1%
-5,8%
107,4%
220,6%
333,8%
447,0%
560,3%
673,5%
786,7%
899,9%
1013,2%
1126,4%
1239,6%
1352,8%
1466,1%


volatilité
35
30
25
20
15
10
5
0
1400,4%
2766,1%
4131,7%
5497,4%
6863,1%
8228,7%
9594,4%
10960,1%
12325,7%
13691,4%
15057,1%
16422,7%
17788,4%
19154,1%
20519,7%
21885,4%
23251,1%

- Le relâchement des contraintes de financement permet d'exploiter plus facilement les opportunités apparentes
  - D'où les rendements moyens plus élevés
- Mais les erreurs d'estimation conduisent aussi à avoir des portefeuilles plus risqués (cf les volatilités)
- Au total :


Eu
35
30
25
20
15
10
5
0
-13772410,1%
-12930563,4%
-12088716,7%
-11246870,0%
-10405023,3%
-9563176,7%
-8721330,0%
-7879483,3%
-7037636,6%
-6195789,9%
-5353943,3%
-4512096,6%
-3670249,9%
-2828403,2%
-1986556,6%
-1144709,9%
-302863,2%

Le paradoxe de Markowitz

- Empiriquement il arrive fréquemment que le portefeuille equipondéré fasse mieux même sur 10 ans et plus que les portefeuilles optimisés!!!
- « Optimisation du portefeuille ou maximisation des erreurs »?

Le paradoxe de Markowitz

- Explications
  - La linéarité des cpo rend le portefeuille optimal très sensible à des modifications des paramètres …
  - Surtout si les titres sont très corrélés entre eux (par exemple oblig et monétaires voir plus loin).
  - Sans prise en compte du risque d’erreurs d’estimation, l’optimisation conduit alors

Le paradoxe de Markowitz

- Explications
  - Sans prise en compte du risque d’erreurs d’estimation, l’optimisation conduit alors à parier excessivement sur des outliers qui ne sont que des mirages
  - D’où « l’optimisation à la Markowitz = la maximisation des erreurs »

Que faire?

- 4 pistes
  - Ne plus optimiser
    - Screening et stratification
    - Mais performance inférieure même à Markowitz (cf travaux de Barra)
  - Introduire des contraintes de financement
    - L'impact positif de l'interdiction des VAD
    - Et d'autres contraintes quantivatives
    - L'explication de R. Jagannathan

Que faire?

- 4 pistes (suite)
  - Le resampling de R. Michaud
  - Le modèle de Black & Litterman et les modèles bayésiens
- Remarque : les deux derniers font partie désormais des solutions commerciales (cf le EnCor de Ibbotson)